PARTE 2 — 1 —

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sui limiti

Esercizi sui limiti di una funzione

Esercizio 1 $\tilde{\ell}_1 = \lim_{x \to -5^-} \frac{x-1}{x^2+3x-10}$

Innanzi tutto, notiamo che si tratta di una forma del tipo $\frac{-6}{0}$ (infatti $(-5)^2+3\cdot(-5)-10 = 25-15-10=0$).
Per determinare il segno, «decomponiamo» il denominatore. Risolviamo l'equazione $x^2+3x-10=0$. Si ha:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3\pm 7}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

Quindi $x^2+3x-10 = (x-2)\cdot(x+5)$, e

$$\tilde{\ell}_1 = \lim_{x\to -5^-} \frac{x-1}{(x-2)(x+5)} = \frac{-6}{(-7)\cdot 0^-} = \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{0^-} = -\infty,$$

per la regola dei segni.

Esercizio 2 : $\tilde{\ell}_2 = \lim_{x\to -\infty} \frac{5x^3-6x^2+7x-1}{8x^3+x-3}$

Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse $5x^3$ e il denominatore si comporta come se fosse $8x^3$.

Si ha: $\tilde{\ell}_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{5\cancel{x^3}}{8\cancel{x^3}} = \frac{5}{8}$.

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sui limiti

Esercizi sui limiti di una funzione

Esercizio 3: $\tilde{l}_3 = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$

Innanzi tutto, notiamo che si tratta di una forma del tipo

$\frac{(-2)^2+5\cdot(-2)+6}{(-2)^2+4\cdot(-2)+4} = \frac{4-10+6}{4-8+4} = \frac{0}{0}$. Adesso, «scomponiamo» il numeratore, risolvendo l'equazione $x^2+5x+6=0$. Si ha:

$$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5\pm 1}{2} \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

Quindi $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$. Veniamo al denominatore, risolvendo l'equazione $x^2+4x+4=0$. Si ha:

$x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2} = -2$ (radice doppia), quindi $x^2+4x+4=(x+2)^2$. Si ha:

$$\tilde{l}_3 = \lim_{x\to -2^-} \frac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{(x+2)^2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sui limiti

Esercizi sui limiti di una funzione

Esercizio 4: $\tilde{l}_4 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^3 - x^2 + 7}{8x^3 - 2x^2 + x - 1}$

Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse $6x^3$, mentre il denominatore si comporta come se fosse $8x^3$. Pertanto si ha:

$$\tilde{l}_4 = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^3}{8x^3} = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 5 $\tilde{l}_5 = \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$.

Notiamo che sostituendo x con -3, si ottiene $(-3)^2 + 5\cdot(-3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, e inoltre $(-3)^2 + 6\cdot(-3) + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$. Si tratta dunque di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. "Decomponiamo" il numeratore. Procedendo come nell'esercizio 18, si ha, risolvendo l'equazione $x^2+5x+6=0$:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

Pertanto, $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$. Veniamo al denominatore risolvendo l'equazione $x^2+6x+9=0$. Si ha:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = -3 \text{ (radice doppia), e quindi}$$

$x^2+6x+9 = (x+3)^2$. Si ha:

$$\tilde{l}_5 = \lim_{x \to -3^+} \frac{(x+2)\cdot(x+3)}{(x+3)^2} = \lim_{x \to -3^+} \frac{x+2}{x+3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sui limiti

Esercizi sui limiti di una funzione

ESERCIZIO 6. Calcolare $\tilde{l}_6 = \lim_{x \to -\infty} \frac{6x^3 - x^2 + 7}{8x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 1}$

Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse $6x^3$, e il denominatore si comporta come se fosse $8x^4$. Pertanto

$$\tilde{l}_6 = \lim_{x \to -\infty} \frac{6x^3}{8x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{4x} = \left(\frac{3}{-\infty}\right) = 0.$$

ESERCIZIO 7 Calcolare $\tilde{l}_7 = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 - 2}{5x^3 - 2x^2 - 7x - 1}$.

Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse $3x^3$, mentre il denominatore si comporta come se fosse $5x^3$. Quindi

$$\tilde{l}_7 = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3}{5x^3} = \frac{3}{5}$$

ESERCIZIO 8 $\tilde{l}_8 = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 + x}{x^2 - 4x}$.

Svolgimento: "Raccogliamo", "evidenziamo" x sia al numeratore sia al denominatore. Si ha

$$\tilde{l}_8 = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \cdot (x^2 + 3x + 1)}{\cancel{x} \cdot (x - 4)} = \frac{0^2 + 3 \cdot 0 + 1}{0 - 4} = -\frac{1}{4}$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISTRUZIONE

Esercizi sui limiti

ESERCIZI 14: Limiti di una funzione

Esercizio 9: $\tilde{l}_9 = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-7x+12}{x^2+x-20}$

Andiamo a "sostituire" x con 4. Al numeratore si ottiene $16-28+12=0$, mentre al denominatore si ha $16+4-20=0$. Si tratta quindi di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Cerchiamo di «scomporre» il numeratore, risolvendo l'equazione $x^2-7x+12=0$. Si ha

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7\pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

Pertanto, $x^2-7x+12 = (x-4)\cdot(x-3)$

Adesso «decomponiamo» il denominatore, risolvendo l'equazione x^2+x-20. Si ha

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{-1\pm 9}{2} \begin{matrix} \nearrow -5 \\ \searrow 4 \end{matrix}$$

Quindi, $x^2+x-20 = (x-4)(x+5)$;

$$\tilde{l}_9 = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x-3)}{\cancel{(x-4)}(x+5)} = \frac{1}{9}.$$

Esercizio 10: $\tilde{l}_{10} = \lim_{x\to +\infty} \frac{7x^3-2x^2+x-8}{9x^4-3x^3+10x^2-2}$

Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse $7x^3$, mentre il denominatore si comporta come se fosse $9x^4$. Quindi

$$\tilde{l}_{10} = \lim_{x\to +\infty} \frac{7x^3}{9x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{9x} = \left(\frac{7}{+\infty}\right) = 0.$$

Esercizio 11: $\tilde{l}_{11} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-4x^3+6x^2+3}{10x^3-4x^2-9x-5}$

Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse $-4x^3$, e il denominatore si comporta come se fosse $10x^3$. Quindi $\tilde{l}_{11} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4\cancel{x^3}}{10\cancel{x^3}} = -\frac{2}{5}$.

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

ESERCIZI SUI LIMITI

Esercizio 12 $\tilde{l}_{12} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^3+6x^2-5x}{3x^2-4x}$

Si ha: $\tilde{l}_{12} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \cdot (2x^2+6x-5)}{\cancel{x}(3x-4)} = \frac{0+0-5}{0-4} = \frac{5}{4}$

Esercizio 13 $\tilde{l}_{13} = \lim_{x \to 5} \frac{x^2+x-30}{x^2-13x+40}$

Andiamo a "sostituire" x con 5. Al numeratore si ottiene $25+5-30=0$, e al denominatore si ha $25-65+40=0$. Si tratta quindi di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.

«Decomponiamo» il numeratore, risolvendo l'equazione $x^2+x-30=0$. Si ha: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2} = \begin{matrix} \nearrow -6 \\ \searrow 5 \end{matrix}$

Quindi $x^2+x-30 = (x+6) \cdot (x-5)$

Adesso «scomponiamo» il denominatore, risolvendo l'equazione $x^2-13x+40$. Si ha: $x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-160}}{2} = \frac{13 \pm 3}{2} = \begin{matrix} \nearrow 8 \\ \searrow 5 \end{matrix}$

Quindi $x^2-13x+40 = (x-8) \cdot (x-5)$

Pertanto, $\tilde{l}_{13} = \lim_{x \to 5} \frac{(x+6) \cdot (x-5)}{(x-8) \cdot (x-5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x+6}{x-8} = \frac{5+6}{5-8} = \frac{11}{-3} =$

$= -\frac{11}{3}$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sui limiti

ESERCIZI 4.1 Limiti di una funzione

Esercizio 14 $\tilde{\ell}_{14} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3 - x^2 + 2x + 2}{7x^2 + 3x - 1}$

Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse $4x^3$, mentre il denominatore si comporta come se fosse $7x^2$. Quindi

$$\tilde{\ell}_{14} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{7x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{7} = \left(\frac{+\infty}{7}\right) = +\infty$$

Esercizio 15 : $\tilde{\ell}_{15} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4x+3}{1-x}$

Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse x^2, mentre il denominatore si comporta come se fosse $-x$. Quindi

$$\tilde{\ell}_{15} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE
ESERCIZI SULLE DERIVATE

D1) Calcolare la derivata di

$$f_1(x) = x^5 + 7x^4 - 2x^3 + 3x - 1$$

Utilizziamo il fatto che la derivata della somma (differenza) è uguale alla somma (differenza) delle derivate, e che la costante moltiplicativa può essere portata "fuori" dal segno di derivata. Si ha:

$$f_1'(x) = D(x^5) + D(7x^4) - D(2x^3) + D(3x) - D(1) =$$
$$= 5x^4 + 7\cdot D(x^4) - 2\cdot D(x^3) + 3\cdot D(x) - 0 =$$
$$= 5x^4 + 7\cdot 4x^3 - 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 1 =$$
$$= 5x^4 + 28x^3 - 6x^2 + 3.$$

D2) Calcolare la derivata di

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 2x - 4.$$

Procediamo come nell' esercizio precedente.
Si ha: $f_2'(x) = D\left(\frac{1}{2}\cdot x^4\right) - D\left(\frac{2}{3}x^3\right) - D(5x^2) + D(2x) - D(4) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot D(x^4) - \frac{2}{3}\cdot D(x^3) - 5\cdot D(x^2) + 2\cdot D(x) + 0 =$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \overset{2}{\cancel{4}}x^3 - \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}x^2 - 5\cdot 2x + 2\cdot 1$$
$$= 2x^3 - 2x^2 - 10x + 2$$

D3) Calcolare la derivata di $f_3(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 - 3x + 1$

Come in D1) e D2), si ha: $f_3'(x) = D\left(\frac{1}{4}x^4\right) + D\left(\frac{4}{3}x^3\right) - D(6x^2) - D(3x) + D(1) =$

$$= \frac{1}{4}D(x^4) + \frac{4}{3}D(x^3) - 6D(x^2) - 3D(x) + 0 = \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}x^3 + \frac{4}{\cancel{3}}\cancel{3}x^2 - 6\cdot 2x - 3\cdot 1 =$$
$$= x^3 + 4x^2 - 12x - 3.$$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

ESERCIZI SULLE DERIVATE

D4) Calcolare la derivata di $f_4(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$

Si ha: $f_4(x) = x^{-1} + x^{-3} - x^{-4}$, e quindi (derivata della somma (differ.) = somma (differ.) delle derivate)

$f_4'(x) = -x^{-2} - 3 \cdot x^{-4} - (-4x^{-5}) = -x^{-2} - 3 \cdot x^{-4} + 4 \cdot x^{-5} =$

$= -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}$ (perché $D(x^{-1}) = -x^{-2}$, $D(x^{-3}) = -3x^{-4}$, $D(x^{-4}) = -4x^{-5}$)

D5) Calcolare la derivata di $f_5(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}$

Procedendo come nell'esercizio precedente, tenendo conto sempre che "la derivata della somma (differenza) è uguale alla somma (differenza) delle derivate", si ha: $f_5(x) = -x^{-1} + x^{-2} + x^{-5}$;

$f_5'(x) = -D(x^{-1}) + D(x^{-2}) + D(x^{-5}) = -(-1) \cdot x^{-2} + (-2) \cdot x^{-3} +$

$+ (-5) \cdot x^{-6} = x^{-2} - 2x^{-3} - 5x^{-6} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x^6}$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle derivate

Esercizio D6) $f_6(x) = (3x-2)\cdot(x^2+4x-3)$.

1° modo: Si ha: $f_6(x) = 3x^3 - 2x^2 + 12x^2 - 8x - 9x + 6 = 3x^3 + 10x^2 - 17x + 6$, e quindi $f'_6(x) = 3\cdot D(x^3) + 10\cdot D(x^2) - 17\cdot D(x) + D(6) = 3\cdot 3x^2 + 10\cdot 2x - 17\cdot 1 + 0 = 9x^2 + 20x - 17$.

2° modo: Applicando la formula di derivazione del prodotto, si ha: $f'_6(x) = [D(3x-2)]\cdot(x^2+4x-3) + (3x-2)\cdot D(x^2+4x-3) = 3\cdot(x^2+4x-3) + (3x-2)\cdot(D x^2 + 4D(x) - \underset{0}{D(3)}) = 3x^2 + 12x - 9 + (3x-2)\cdot(2x+4) = 3x^2 + 12x - 9 + 6x^2 - 4x + 12x - 8 = 9x^2 + 20x - 17$

Esercizio D7) $f_7(x) = (2x+3)\cdot(x^2+3x-1)$

1° modo: Si ha: $f_7(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x^2 + 9x - 2x - 3 = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 3$, e quindi $f'_7(x) = 2\cdot D(x^3) + 9\,D(x^2) + 7\,D(x) + D(-3) = 2\cdot 3x^2 + 9\cdot 2x + 7\cdot 1 + 0 = 6x^2 + 18x + 7$.

2° modo: Applicando la formula di derivazione del prodotto, si ha: $f'_7(x) = [D(2x+3)]\cdot(x^2+3x-1) + (2x+3)\cdot D(x^2+3x-1) = 2\cdot(x^2+3x-1) + (2x+3)\cdot(D(x^2) + 3D(x) - D(1)) = 2x^2 + 6x - 2 + (2x+3)\cdot(2x+3) = 2x^2 + 6x - 2 + 4x^2 + 12x + 9 = 6x^2 + 18x + 7$.

Esercizio D8) Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$f_8(x) = \frac{x^2-3x+5}{x^2-1}$$

($x \neq \pm 1$, perché il denominatore è $\neq 0$, $x^2 \neq 1$ da cui $x \neq \pm 1$)

Applicando la formula di derivazione del quoziente, si ha

$$f_8'(x) = \frac{(D(x^2-3x+5))\cdot(x^2-1)-(x^2-3x+5)\cdot D(x^2-1)}{(x^2-1)^2} \overset{(1)}{=}$$

procedendo come nell'esercizio D1), cioè tenendo conto che "la derivata della somma (differenza) è uguale alla somma (differenza) delle derivate" e che "la costante moltiplicativa si può portare dentro o fuori il segno di derivata", si ottiene

$$\overset{(1)}{=} \frac{[D(x^2)-3D(x)+D(5)]\cdot(x^2-1)-(x^2-3x+5)\cdot[D(x^2)-D(1)]}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{(2x-3)\cdot(x^2-1)-(x^2-3x+5)\cdot(2x)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3}-3x^2-2x+3-\cancel{2x^3}+6x^2-10x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-12x+3}{(x^2-1)^2}$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio sulle derivate

Esercizio D9) Calcolare la derivata della funzione

Esercizio 19) $f_{19}(x) = \dfrac{3x^2-2x+1}{x^2-2}$ Come nell'esercizio D8)

Applicando la regola di derivazione del quoziente, si ha:

$$f_{19}'(x) = \frac{\left[D(3x^2-2x+1)\right]\cdot(x^2-2)-(3x^2-2x+1)\cdot D(x^2-2)}{(x^2-2)^2} =$$

$$= \frac{\left(3D(x^2)-2D(x)+\overset{0}{D(1)}\right)\cdot(x^2-2)-(3x^2-2x+1)\cdot\left(D(x^2)-\overset{0}{D(2)}\right)}{(x^2-2)^2} =$$

$$= \frac{(3\cdot 2x-2\cdot 1)(x^2-2)-(3x^2-2x+1)\cdot 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{(6x-2)(x^2-2)-6x^3+4x^2-2x}{(x^2-2)^2}$$

$$= \frac{6x^3-2x^2-12x+4-6x^3+4x^2-2x}{(x^2-2)^2} = \frac{2x^2-14x+4}{(x^2-2)^2}$$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio sulle derivate

Esercizio D 10) Calcolare la derivata della funzione

ESERCIZIO D 10) $f_{10}(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+6x+9}$

Applicando la regola di derivazione del quoziente, si ha:

$$f'_{10}(x) = \frac{D[x^2+5x+4]\,(x^2+6x+9) - (x^2+5x+4)\,D[x^2+6x+9]}{(x^2+6x+9)^2} =$$

$$= \frac{(2x+5)\cdot(x^2+6x+9) - (x^2+5x+4)\cdot(2x+6)}{(x^2+6x+9)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3}+5x^2+12x^2+30x+18x+45-\cancel{2x^3}-10x^2-8x-6x^2-30x-24}{(x^2+6x+9)^2} =$$

$$= \frac{x^2+10x+21}{(x^2+6x+9)^2}$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio sulle derivate

Esercizio D11) Calcolare la derivata della seguente funzione:

ESERCIZIO D11) $f_{11}(x) = (x^2-3x-5)\cdot(3x^2-2x+1) + \dfrac{x+1}{3(x^2-1)}$

Applicando la regola di derivazione del prodotto e la regola di derivazione del quoziente, si ha:

$$f'_{11}(x) = \left[D(x^2-3x-5)\right]\cdot(3x^2-2x+1) + (x^2-3x-5)\cdot D(3x^2-2x+1) + \\ + \frac{\left[D(x^2+1)\right]\cdot 3(x^2-1) - (x^2+1)\cdot D(3(x^2-1))}{9\cdot(x^2-1)^2} =$$

$$= \left(D(x^2) - 3D(x) + \underbrace{D(5)}_{0}\right)\cdot(3x^2-2x+1) + (x^2-3x-5)\cdot\left(3D(x^2) - 2D(x) + \underbrace{D(1)}_{0}\right) + \\ + \frac{\left(D(x^2)+D(1)\right)\cdot 3(x^2-1) - (x^2+1)\cdot\left(3D(x^2) - 3D(1)\right)}{9\cdot(x^2-1)^2} =$$

$$= (2x-3)(3x^2-2x+1) + (x^2-3x-5)\cdot(3\cdot 2x-2) + \frac{2x\cdot 3(x^2-1) - (x^2+1)(3\cdot 2x)}{9\cdot(x^2-1)^2} =$$

$$= 6x^3 - 9x^2 - 4x^2 + 6x + 2x - 3 + 6x^3 - 18x^2 - 30x - 2x^2 + 6x + 10 + \frac{6x^3 - 6x - 6x^3 - 6x}{9(x^2-1)^2} =$$

$$= 12x^3 - 33x^2 - 16x + 7 - \frac{\overset{4}{\cancel{12}}x}{\underset{3}{\cancel{9}}(x^2-1)^2}.$$

Esempi di studio del grafico di una funzione

Funz. 1) primo esempio

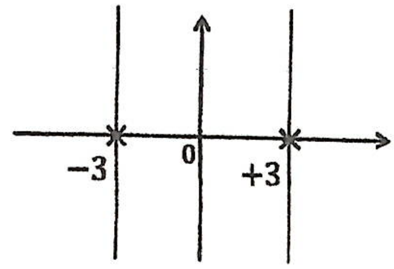
Studiamo la seguente funzione $$y=\frac{x}{x^2-9}$$

• **ricerca del dominio**

si pone il denominatore diverso da zero perché la funzione assegnata è una funzione fratta:

$$x^2-9\neq 0 \;\rightarrow\; x\neq \pm 3 \;\rightarrow\; \forall x\in\mathcal{R}-\{\pm 3\}$$

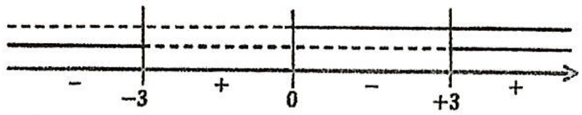
Cioè $]-\infty,-3[\,\cup\,]-3,3[\,\cup\,]3,+\infty[$

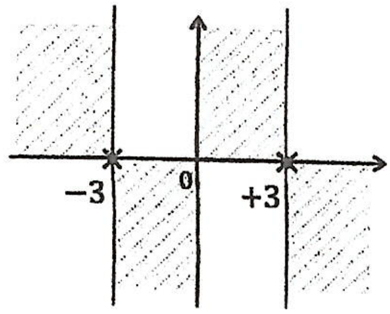


• **studio del segno**

si pone la funzione maggiore di zero e si studia la disequazione individuando le regioni di piano dove la funzione esiste ed è positiva o negativa. Si cancellano le regioni di piano dove la funzione non esiste:

$$\frac{x}{x^2-9}>0 \;\rightarrow\; \begin{cases}x>0\\ x^2-9>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x>0\\ x<-3\ \cup\ x>3\end{cases}$$





• **studio delle intersezioni con gli assi cartesiani**

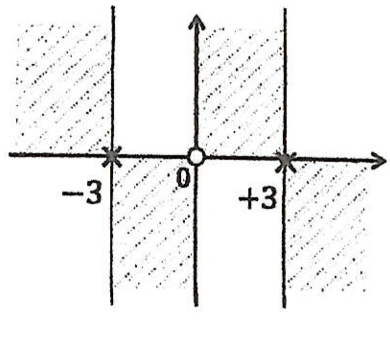
dall'osservazione del grafico dello studio del segno è evidente che la funzione ha un solo punto di intersezione con gli assi, coincidente con l'origine (0,0).

Solo come esercizio algebrico, studiamo l'intersezione della funzione con l'asse x:

$$\begin{cases}y=\frac{x}{x^2-9}\\ y=0\end{cases} \rightarrow \frac{x}{x^2-9}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow P(0,0)$$

e l'intersezione della funzione con l'asse y:

$$\begin{cases}y=\frac{x}{x^2-9}\\ x=0\end{cases} \rightarrow y=\frac{0}{-9} \rightarrow y=0 \rightarrow P(0,0)$$



• **studio delle simmetrie**

dall'osservazione del grafico dello studio del segno è evidente che la funzione non è pari mentre potrebbe essere dispari. Verifichiamolo algebricamente sostituendo la x con $-x$ nel testo della funzione e sviluppando i calcoli:

$$f(-x)=\frac{(-x)}{(-x)^2-9}=\frac{-x}{x^2-9} \quad \text{con} \quad f(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad \text{quindi } f(-x)\neq f(x) \text{ e non è pari}$$

Verifichiamo se la funzione è dispari raccogliendo il – nell'espressione di $f(-x)$:

$$f(-x)=\frac{-x}{x^2-9}=-\left(\frac{x}{x^2-9}\right) = -f(x) \quad \text{quindi la funzione è dispari}$$

• **ricerca degli asintoti verticali**

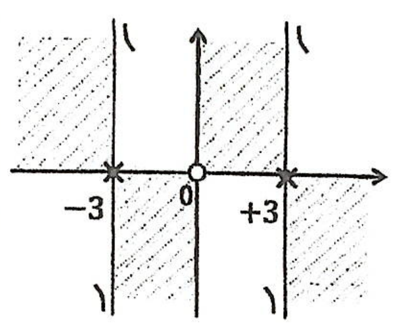
si calcola il limite sinistro e destro della funzione per x che tende ai punti ± 3 individuati con la ricerca del dominio: $]-\infty,-3[\,\cup\,]-3,3[\,\cup\,]3,+\infty[$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{x}{x^2-9}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +3^-}\frac{x}{x^2-9}=-\infty$$

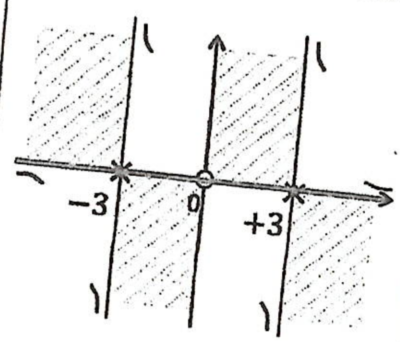
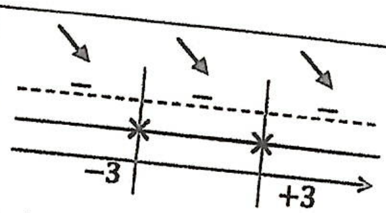
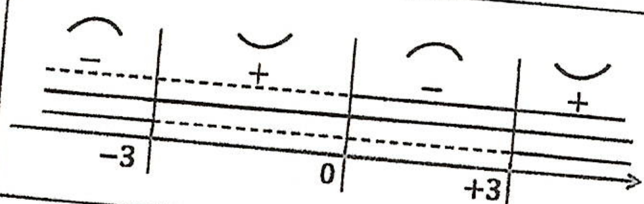
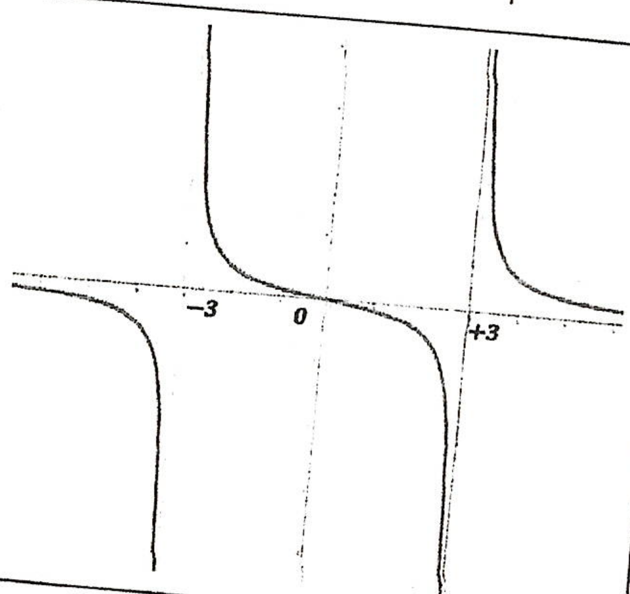
$$\lim_{x\to -3^+}\frac{x}{x^2-9}=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +3^+}\frac{x}{x^2-9}=+\infty$$

esistono due asintoti verticali di equazione $\boxed{\text{VEDI p. 1[illegible]}}$

$$x=-3 \quad \text{e} \quad x=+3$$



-~~15~~ 16- Esempi di studio del grafico di una funzione

• ricerca degli asintoti orizzontali	si calcola il limite della funzione per x che tende a $-\infty$ e a $+\infty$: $= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\,1}{x^{\cancel{2}}} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-9} = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-9} = 0$ (principio di sostituzione degli infiniti) l'asse delle x di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale per la funzione sia a $-\infty$ che a $+\infty$ La presenza dell'asintoto orizzontale a $-\infty$ e a $+\infty$ esclude la presenza dell'asintoto obliquo	
• studio della monotonia e dei punti di massimo e minimo	la crescenza e decrescenza della funzione si cerca studiando il segno della derivata prima della funzione, cioè si calcola la derivata prima e si pone maggiore di zero, cioè $f'(x) > 0$: $\frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2} > 0 \rightarrow \begin{cases} -x^2-9 > 0 \\ (x^2-9)^2 > 0 \end{cases} \rightarrow$ *si risolve il sistema* $\rightarrow \begin{cases} \textit{impossibile} \\ \forall x \in \mathcal{R} - \{\pm 3\} \end{cases}$	 la derivata è sempre negativa e quindi la funzione è ~~sempre~~ decrescente. Non esistono massimi e minimi) in $]-\infty,-3[$, in $]-3,3[$ e in $]3,+\infty[$ (in OGNI SINGOLO PEZZO)
• studio della concavità e dei punti di flesso	la concavità della funzione si cerca studiando il segno della derivata seconda della funzione, cioè ponendo $f''(x) > 0$: Vedi p. 17 $\frac{2x\,(x^2+27)}{(x^2-9)^3} > 0 \quad \rightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ x^2+27 > 0 \\ (x^2-9)^3 > 0 \end{cases} \rightarrow$ *si risolve il sistema* $\rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \forall x \in \mathcal{R} \\ x < -3 \;\cup\; x > +3 \end{cases}$ 	la derivata è negativa per $x < -3$ e $0 < x < +3$ e quindi la funzione ha concavità verso il basso; la derivata è positiva per $-3 < x < 0$ e $x > +3$ e quindi la funzione ha concavità verso l'alto. Esiste un punto di flesso di ascissa $x = 0$. Per trovarne l'ordinata basta sostituire l'ascissa nel testo della funzione: $f(0) = 0 \;\rightarrow\;$ *flesso* $(0,0)$
Quindi si vede dal grafico che f è decrescente in $]-\infty,-3[$, decrescente in $]-3,3[$, decrescente in $]3,+\infty[$. N.B.: f NON È GLOBALMENTE DECRESCENTE, perché nel • disegno del grafico Suo dominio ci sono due "buchi" (i punti 3 e −3)		si traccia il grafico della funzione tenendo conto di tutti i risultati ottenuti precedentemente. [Per una maggiore precisione si possono calcolare le coordinate di alcuni punti della funzione attribuendo alla x valori arbitrari del dominio e calcolandone le corrispondenti y]

Più precisamente, per calcolare i limiti del tipo $\boxed{\lim_{x\to\pm3^{\pm}} \frac{x}{x^2-9}}$,

si considera il segno della frazione:

$-$		$+$		$-$		$+$
	-3		0		3	

(TRUCCO!!). Questi limiti sono con lo 0 al denominatore, quindi per vedere se è $+\infty$ oppure $-\infty$ si guarda semplicemente il segno di $\frac{x}{x^2-9}$ (che era stato calcolato precedentemente): al segno $-$ corrisponderà il valore $-\infty$ del limite, mentre al segno $+$ corrisponderà $+\infty$. Pertanto

$$\lim_{x\to-3^-}\frac{x}{x^2-9}=-\infty,\quad \lim_{x\to-3^+}\frac{x}{x^2-9}=+\infty,\quad \lim_{x\to3^-}\frac{x}{x^2-9}=-\infty,\quad \lim_{x\to3^+}\frac{x}{x^2-9}=+\infty$$

(QUANDO SAPPIAMO IL SEGNO DELLA FUNZIONE, C'È QUESTA "SCORCIATOIA"!!)

Calcolo della derivata prima: è $f(x)=\frac{x}{x^2-9}$, quindi

$$f'(x)=\frac{[D(x)]\,(x^2-9)-x\cdot[D(x^2-9)]}{(x^2-9)^2}=\frac{1\cdot(x^2-9)-x\cdot 2x}{(x^2-9)^2}=\frac{x^2-9-2x^2}{(x^2-9)^2}=$$

$$=\frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2}=-\frac{x^2+9}{(x^2-9)^2}<0$$

f è decrescente in $]-\infty,-3[$, decrescente in $]-3,3[$, decrescente in $]3,+\infty[$ (STRETTA decrescenza).

$$\boxed{f''(x)}=\frac{[D(-x^2-9)]\cdot(x^2-9)^2-(-x^2-9)\cdot[D((x^2-9)^2)]}{(x^2-9)^4}=\ldots$$

$D((x^2-9)^2)$: $w=x^2-9$ $\begin{cases} w^2: & D(w^2)=2w=2(x^2-9) \\ x^2-9 & D(x^2-9)=2x \end{cases}$ $D((x^2-9)^2)=4x(x^2-9)=4x^3-36x$

derivata di FUNZIONI COMPOSTE

$$\ldots=\frac{(-2x)\cdot(x^2-9)^{\cancel{2}}+(x^2+9)\cdot 4x\cdot\cancel{(x^2-9)}}{(x^2-9)^{\cancel{4}3}}=\frac{-2x^3+18x+4x^3+36x}{(x^2-9)^3}=$$

$$=\frac{2x^3+54x}{(x^2-9)^3}=\boxed{\frac{2x(x^2+27)}{(x^2-9)^3}}$$

Esempi di studio del grafico di una funzione

secondo esempio Funz. 2)

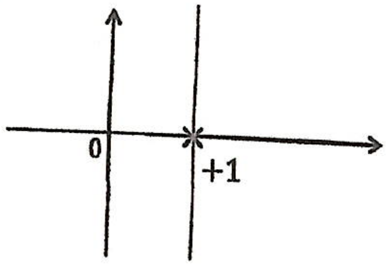
Studiamo la seguente funzione $y = \dfrac{x^2}{1-x}$

- **ricerca del dominio**

si pone il denominatore diverso da zero perché la funzione assegnata è una funzione fratta:

$1 - x \neq 0 \;\rightarrow\; x \neq +1 \;\rightarrow\; \forall x \in \mathcal{R} - \{+1\}$

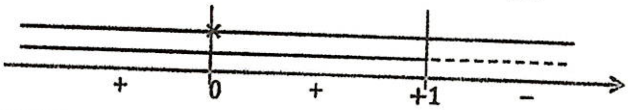
cioè $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

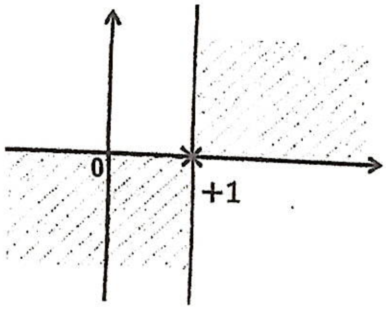


- **studio del segno**

si pone la funzione maggiore di zero e si risolve la disequazione individuando le regioni di piano dove la funzione è positiva o negativa. Si cancellano le regioni di piano dove la funzione non esiste:

$$\frac{x^2}{1-x} > 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x^2 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \;\rightarrow\; \begin{cases} \forall x \in \mathcal{R} - \{0\} \\ x < 1 \end{cases}$$





- **studio delle intersezioni con gli assi cartesiani**

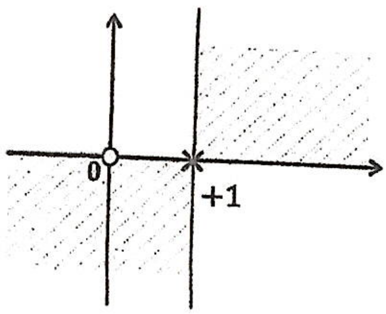
dall'osservazione del grafico dello studio del segno è evidente che la funzione non attraversa gli assi, ma presenta un solo punto di contatto coincidente con l'origine (0,0).

Solo come esercizio algebrico, studiamo l'intersezione della funzione con l'asse x:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \;\rightarrow\; \frac{x^2}{1-x} = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; P(0,0)$$

e l'intersezione della funzione con l'asse y:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{1-x} \\ x = 0 \end{cases} \;\rightarrow\; y = \frac{0}{1} \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; P(0,0)$$



- **studio delle simmetrie**

dall'osservazione del grafico dello studio del segno è evidente che la funzione non presenta simmetrie. Verifichiamolo anche algebricamente sostituendo la x con $-x$ nel testo della funzione e sviluppando i calcoli:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{1-(-x)} = \dfrac{x^2}{1+x}$ con $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$ quindi

$f(-x) \neq f(x)$ la funzione non è pari

$f(-x) \neq -f(x)$ la funzione non è dispari

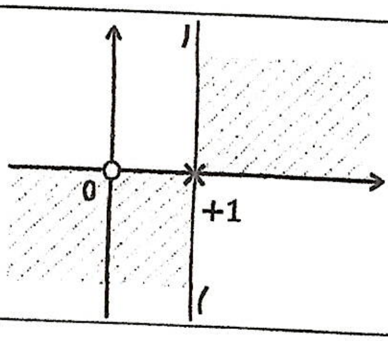
- **ricerca degli asintoti verticali**

si calcola il limite sinistro e destro della funzione per x che tende al punto +1 (perché $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ è il dominio della funzione)

$$\lim_{x \to +1^-} \frac{x^2}{1-x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +1^+} \frac{x^2}{1-x} = -\infty$$

(vedi inizio pagina 20)

esiste un solo asintoto verticale di equazione $x = +1$



19 Esempi di studio del grafico di una funzione

• ricerca degli asintoti orizzontali

si calcola il limite della funzione per x che tende a $-\infty$ e a $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-x}=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-x}=-\infty$$

la funzione non presenta asintoto orizzontale né a $-\infty$ nè a $+\infty$
Ha senso ricercare l'asintoto obliquo

• ricerca degli asintoti obliqui

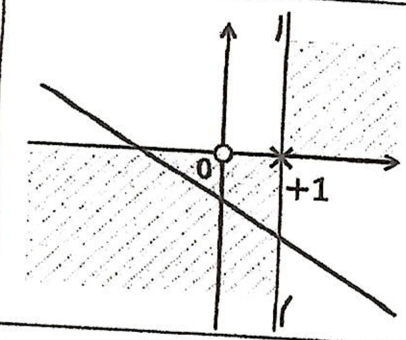
si calcolano i valori del coefficiente angolare m e dell'ordinata all'origine q dell'equazione $y=mx+q$ dell'asintoto obliquo :

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1-x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}=-1$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1-x}+x=\frac{x}{1-x}=-1$$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITI Vedi pag. 20

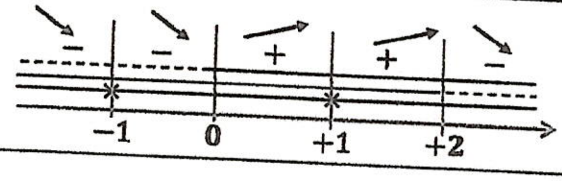
la funzione ammette un asintoto obliquo di equazione
$y=-x-1$



• studio della monotonia e dei punti di massimo e minimo

la crescenza e decrescenza della funzione si cerca studiando il segno della derivata prima della funzione, cioè si calcola la derivata prima e la si pone maggiore di zero, cioè $f'(x)>0$: Vedi pag. 20

$$\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}>0 \to \begin{cases} x>0 \\ 2-x>0 \\ (1-x)^2>0 \end{cases} \to \begin{cases} x>0 \\ x<2 \\ \forall x\in\mathcal{R}-\{\pm1\} \end{cases}$$



la derivata è negativa per $x<0$ e $x>+2$ e quindi la funzione decresce; la derivata è positiva per $0<x<+2$ e quindi la funzione cresce. Il punto di ascissa $x=0$ è un punto di minimo e quello di ascissa $x=+2$ è un massimo. Per trovare le rispettive ordinate basta sostituire le ascisse dei punti nel testo della funzione:

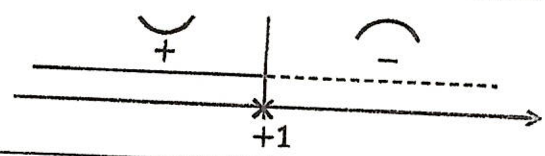
$f(0)=0\to\min\ (0,0)$

$f(+2)=-4\to\max(+2,-4)$

• studio della concavità e dei punti di flesso

la concavità della funzione si cerca studiando il segno della derivata seconda della funzione, cioè ponendo $f''(x)>0$:

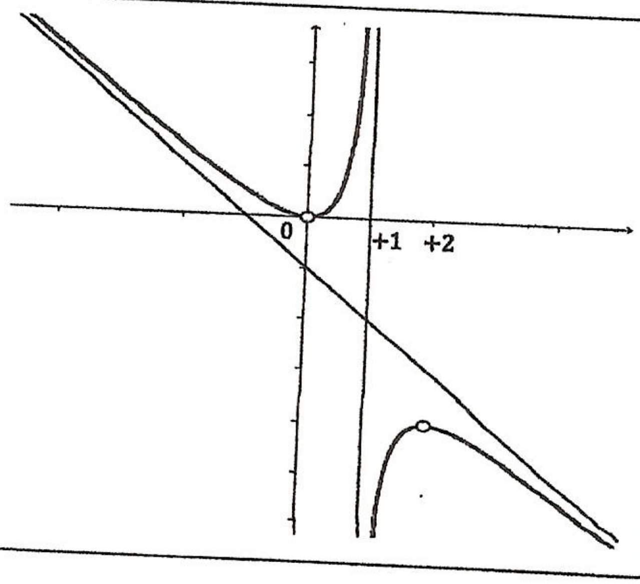
$$\frac{2}{(1-x)^3}>0 \to \begin{cases} 2>0 \\ (1-x)^3>0 \end{cases} \to \begin{cases} \forall x\in\mathcal{R} \\ x<1 \end{cases}$$



la derivata seconda è positiva per $x<+1$ e negativa per $x>+1$ e quindi la funzione ha concavità verso l'alto per $x<+1$ e concavità verso il basso per $x>+1$.

Non esistono punti di flesso perché $x=+1$ è un punto in cui la funzione NON È DEFINITA.

• disegno del grafico



si traccia il grafico della funzione tenendo conto di tutti i risultati ottenuti precedentemente.

[Per una maggiore precisione si possono calcolare le coordinate di alcuni punti della funzione attribuendo alla x valori arbitrari del dominio e calcolandone le corrispondenti y]

Più precisamente, $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$, $\boxed{m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(1-x)}=$ (principio di sostituzione degli infiniti) $=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{-x}=\boxed{-1}$; inoltre, $\boxed{q}=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{1-x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x}\overset{\text{(come}}{\underset{\text{per } m)}{=\!=}}\boxed{-1}$. Pertanto la retta $y=-x-1$ è un asintoto obliquo per la nostra funzione, sia dal lato $+\infty$ sia dal lato $-\infty$.

Per quanto riguarda gli asintoti verticali,

Più precisamente, $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$, $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{1-x}=$ $=\frac{1}{0^-}=-\infty$ (perché, se $x\to 1^-$, allora $1-x\to 0^+$, il segno si inverte; analogamente, se $x\to 1^+$, allora $1-x\to 0^-$)

Derivata prima: $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$ $\boxed{f'(x)}=\frac{[D(x^2)](1-x)-x^2\cdot[D(1-x)]}{(1-x)^2}=$

$$=\frac{2x(1-x)-x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}=\boxed{\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}}$$

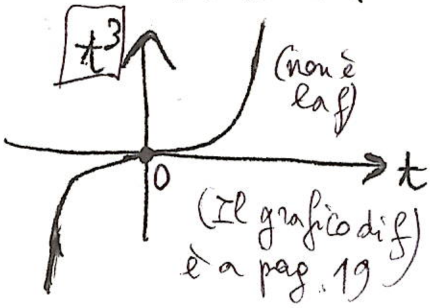
Derivata seconda: $\boxed{f''(x)}=\frac{[D(2x-x^2)]\cdot(1-x)^2-(2x-x^2)\cdot[D(1-x)^2]}{(1-x)^4}=$

$$=\frac{(2-2x)\cdot(1-x)^{\cancel{2}}-(2x-x^2)\cdot(-2)\cancel{(1-x)}}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}}=$$

N.B.: $(1-x)^2=x^2-2x+1$
$D(x^2-2x+1)=2x-2=$
$=-2(1-x)$

$$=\frac{2-\cancel{2x}-\cancel{2x}+\cancel{2x^2}+\cancel{4x}-\cancel{2x^2}}{(1-x)^3}=\boxed{\frac{2}{(1-x)^3}}$$

Si ha: $(1-x)^3>0$ se e solo se $1-x>0$ se e solo se $-x>-1$ se e solo se $x<1$ (N.B.: $t^3>0$ se e solo se $t>0$)



(non è la f)

(Il grafico di f è a pag. 19)

Quindi f è convessa ($\cup$) in $]-\infty,1[$ ed è concava ($\cap$) in $]1,+\infty[$.

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE

D12) Calcolare la derivata della funzione

$$f_{12}(x) = \ln(\ln x)$$

(Intanto, $x > 0$. Sia $t = \ln x$; si deve avere $t > 0$, quindi $\boxed{x} = e^t \boxed{>} e^0 = \boxed{1}$)

Applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte.
Consideriamo come funzione "interna"

$$w(x) = \ln x$$

e come funzione "esterna" $f(w) = \ln w$

Si ha: $f'(w) = \frac{1}{w}$

che, calcolata nel punto $w(x)$, diventa

$$f'(w(x)) = \frac{1}{\ln x}$$

Inoltre,

$$w'(x) = \frac{1}{x}$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$f_{12}'(x) = f'(w(x)) \cdot w'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

Più in generale, se prendiamo

$$f_{13}(x) = \ln\,(w(x))$$

(per $w(x) > 0$)

e consideriamo come funzione esterna $f(w) = \ln w$, e allora $f'(w) = \frac{1}{w}$, che calcolata nel punto $w(x)$ diventa $f'(w(x)) = \frac{1}{w(x)}$. Allora, per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$f'_{13}(x) = \frac{1}{w(x)} \cdot w'(x).$$

Quindi sussiste questa <u>IMPORTANTISSIMA FORMULA!</u>

$$D\,(\ln(w(x)) = \frac{w'(x)}{w(x)} \qquad (\text{se } w(x) > 0)$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE
ESERCIZI SULLE DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE

D 14) Calcolare la derivata della funzione

$$f_{14}(x) = (7x^3 - 2x^2 + 3x)^4$$

Applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte. Consideriamo come funzione "interna" $w(x) = 7x^3 - 2x^2 + 3x$ e come funzione "esterna" $f(w) = w^4$, si ha: $f'(w) = 4w^3$, che, calcolata nel punto $w(x)$, diventa

$$f'(w(x)) = 4 \cdot (7x^3 - 2x^2 + 3x)^3$$

Inoltre, $w'(x) = 7 \cdot D(x^3) - 2 \cdot D(x^2) + 3 \cdot D(x^1) = 7 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3 = 21x^2 - 4x + 3$. Per il teorema di derivazione delle funzioni composte,

$$f_{14}'(x) = f'(w(x)) \cdot w'(x) = 4 \cdot (7x^3 - 2x^2 + 3x)^3 \cdot (21x^2 - 4x + 3)$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE

D 15) Calcolare la derivata della funzione

$$f_{15}(x) = \ln^3 x = (\ln x)^3 \qquad (x>0)$$

Applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte.
Consideriamo come funzione "interna"

$$w(x) = \ln x$$

e come funzione "esterna" $f(w) = w^3$

Si ha: $f'(w) = 3w^2$

che, calcolata nel punto $w(x)$, diventa

$$f'(w(x)) = 3 \cdot (\ln x)^2$$

Inoltre,

$$w'(x) = \frac{1}{x}$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$f_{15}'(x) = f'(w(x)) \cdot w'(x) = 3 \cdot (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3 \cdot \ln^2 x}{x}$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE

D16) Calcolare la derivata della funzione

$f_{16}(x) = (x^2 - 5x + 6)^7$

Applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte.
Consideriamo come funzione "interna"

$$w(x) = x^2 - 5x + 6$$

e come funzione "esterna" $f(w) = w^7$

Si ha: $f'(w) = 7w^6$

che, calcolata nel punto $w(x)$, diventa

$$f'(w(x)) = 7 \cdot (x^2 - 5x + 6)^6$$

Inoltre,

$$w'(x) = D(x^2) - 5 \cdot \overbrace{D(x)}^{=1} + \overbrace{D(6)}^{=0} = 2x - 5$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$f'_{16}(x) = f'(w(x)) \cdot w'(x) = 7 \cdot (x^2 - 5x + 6)^6 \cdot (2x - 5)$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE

D 17) Calcolare la derivata della funzione

$$f_{17}(x) = e^{3+4x-x^2}$$

Applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte.

Consideriamo come funzione "interna"

$$w(x) = 3 + 4x - x^2$$

e come funzione "esterna" $f(w) = e^w$

Si ha: $f'(w) = e^w$

che, calcolata nel punto $w(x)$, diventa

$$f'(w(x)) = e^{3+4x-x^2}$$

Inoltre,

$$w'(x) = \overset{0}{D}(3) + 4\overset{1}{\cancel{D(x)}} - D(x^2) = 4 - 2x$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$f_{17}'(x) = f'(w(x)) \cdot w'(x) = e^{3+4x-x^2} \cdot (4-2x)$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE

D 18) Calcolare la derivata della funzione $f_{18}(x) = x^3 \cdot e^{-x^3}$

Si ha (derivata di un prodotto): $f'_{18}(x) = D(x^3) \cdot e^{-x^3} + x^3 \cdot D(e^{-x^3}) = 3x^2 \cdot e^{-x^3} + x^3 \cdot D(e^{-x^3})$. Per calcolare $D(e^{-x^3})$

Applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte.

Consideriamo come funzione "interna"

$$w(x) = -x^3$$

e come funzione "esterna" $f(w) = e^w$

Si ha: $f'(w) = e^w$

che, calcolata nel punto $w(x)$, diventa

$$f'(w(x)) = e^{-x^3}$$

Inoltre,

$$w'(x) = -3x^2$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$D(e^{-x^3}) = f'(w(x)) \cdot w'(x) = e^{-x^3} \cdot (-3x^2) = -3e^{-x^3} \cdot x^2.$$

Pertanto, $f'_{18}(x) = 3x^2 \cdot e^{-x^3} + x^3 \cdot (-3e^{-x^3} \cdot x^2) =$

$$= 3x^2 \cdot e^{-x^3} - 3x^5 \cdot e^{-x^3} = 3x^2 \cdot e^{-x^3} \cdot (1 - x^3)$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE

D19) Calcolare la derivata della funzione

$$f_{19}(x) = \ln(2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1)$$

Applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte.

Consideriamo come funzione "interna"

$$w(x) = 2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1$$

e come funzione "esterna" $f(w) = \ln w$

Si ha: $f'(w) = \frac{1}{w}$

che, calcolata nel punto $w(x)$, diventa

$$f'(w(x)) = \frac{1}{2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1}$$

Inoltre,

$$w'(x) = 2D(x^4) - 6D(x^3) + D(x^2) - 5\,\cancel{D(x)}^{1} + \cancel{D(1)}^{0} =$$

$$= 2 \cdot 4x^3 - 6 \cdot 3x^2 + 2x - 5 = 8x^3 - 18x^2 + 2x - 5$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$f'_{19}(x) = f'(w(x)) \cdot w'(x) = \frac{8x^3 - 18x^2 + 2x - 5}{2x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x + 1}$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE

D 20) Calcolare la derivata della funzione

$$f_{20}(x) = x^x = e^{x \cdot \ln x} \qquad (x>0)$$

Applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte.
Consideriamo come funzione "interna"

$$w(x) = x \cdot \ln x$$

e come funzione "esterna" $f(w) = e^w$

Si ha: $f'(w) = e^w$

che, calcolata nel punto $w(x)$, diventa

$$f'(w(x)) = e^{x \cdot \ln x}$$

Inoltre,

$$w'(x) = \boxed{D(x)} \cdot \ln x + x \cdot D(\ln x) = \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \ln x + 1$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$f_{20}'(x) = f'(w(x)) \cdot w'(x) = e^{x \cdot \ln x} \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio sulle derivate. Calcolare la derivata di:

Esercizio 21) $f_{21}(x) = \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

Si ha: $f_{21}(x) = x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{5}}$, e quindi $f'_{21}(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} +$

$+\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{1}{5}x^{-\frac{1}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}} =$

$$\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}$$

Esercizio 22) $f_{22}(x) = \sqrt[5]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

Si ha: $f_{22}(x) = x^{4/5} - x^{2/3} + x^{-1/5}$, e quindi

$f'_{22}(x) = \frac{4}{5}x^{4/5-1} - \frac{2}{3}x^{2/3-1} - \frac{1}{5}x^{-\frac{1}{5}-1} =$

$= \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}$

Esercizio 23) Calcolare la derivata di

$$f_{23}(x) = (x^3+2x^2+x)\cdot \ln x \qquad (x>0)$$

In base alla formula di derivazione del prodotto, si ha

$f'_{23}(x) = [D(x^3+2x^2+x)]\cdot \ln x + (x^3+2x^2+x)\cdot D(\ln x) =$

$= [D(x^3)+2D(x^2)+D(x)]\cdot \ln x + (x^3+2x^2+x)\cdot \frac{1}{x} =$

$= (3x^2+2\cdot 2x+1)\cdot \ln x + (x^2+2x+1) =$

$= (3x^2+4\cdot x+1)\cdot \ln x + x^2+2x+1$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle applicazioni del calcolo differenziale

Calcolare, con il teorema di De l'Hôpital, i seguenti limiti:

Esercizio 16: $\tilde{l}_{16} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \ln x}{2x+1}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Si ha, applicando il teorema di De l'Hôpital, (il $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$)

$$\tilde{l}_{16} = \lim_{x\to+\infty} \frac{D(3x+\ln x)}{D(2x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$$

Esercizio 17: $\tilde{l}_{17} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Si ha: $\tilde{l}_{17} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{D(e^x - 1)}{D(x)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

Esercizio 18: $\tilde{l}_{18} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3x+1)}{x}$. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Si ha (De l'Hôpital):

$\tilde{l}_{18} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{D(\ln(3x+1))}{D(x)}$. Applichiamo la regola di derivazione delle funzioni composte $D(\ln(w(x))) = \dfrac{w'(x)}{w(x)}$, ove $w(x) = 3x+1$. Si ha: $D(\ln(3x+1)) = \dfrac{D(3x+1)}{3x+1} =$

$$= \frac{3}{3x+1}, \text{ quindi } \tilde{l}_{18} = \lim_{x\to 0} \frac{D(\ln(3x+1))}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{3x+1} = \frac{3}{1} = 3$$

Esercizio 19: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{2x}}{x} = \tilde{l}_{19}$. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Si ha: $\tilde{l}_{19} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{D(2e^{2x})}{D(x)} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2D(e^{2x})}{1} = 2\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}\cdot D(2x)\right) =$$

$$= 2\cdot \lim_{x\to+\infty} 2e^{2x} = +\infty.$$

Esercizio 20: $\tilde{l}_{20} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x-2}$. Si tratta di una forma del tipo $\frac{0}{0}$. Si ha (De l'Hôpital): $\tilde{l}_{20} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{D(e^x - e^2)}{D(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{D(e^x)}{D(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x}{1} = e^2.$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE ESERCIZI SUL TEOREMA DE L'HÔPITAL

ESERCIZIO $\tilde{\ell}_{21} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^x - 2 + e^{-x}}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Si ha

$$\tilde{\ell}_{21} = \lim_{x\to 0} \frac{D(e^x - 1 - x)}{D(e^x - 2 + e^{-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{D(e^x) - D(1) - D(x)}{D(e^x) - D(2) + D(e^{-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x - 0 + e^{-x} \cdot D(-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - e^{-x}}.$$

Abbiamo ottenuto ancora una volta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Si ha, applicando un'altra volta il teorema De l'Hôpital,

$$\tilde{\ell}_{21} = \lim_{x\to 0} \frac{D(e^x - 1)}{D(e^x - e^{-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x - (e^{-x}) \cdot (-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO: $\tilde{\ell}_{22} = \lim_{x\to 3^+} \frac{\ln(x-3)}{\ln(x^2-9)}$

Notiamo che, per $x \to 3^+$ si ha $x - 3 \to 0^+$ (dallo stesso lato); inoltre $x^2 - 9 = (x+3)\cdot(x-3)$ tende a $6 \cdot 0^+ = 0^+$. Quindi il nostro limite è della forma $\frac{\ln(0^+)}{\ln(0^+)}$, cioè $\frac{-\infty}{-\infty}$. Applicando il teorema de l'Hôpital, si ha

$$\tilde{\ell}_{22} = \lim_{x\to 3^+} \frac{\ln(x-3)}{\ln(x^2-9)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{D(\ln(x-3))}{D(\ln(x^2-9))}.$$

Calcoliamo ora $D(\ln(x-3))$ e $D(\ln(x^2-9))$.
Applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte, consideriamo come funzioni "interne" $w_1(x)=x-3$, $w_2(x)=x^2-9$, e come funzione "esterna" $f(w)=\ln w$. Si ha: $f'(w)=\frac{1}{w}$, che, calcolata nei punti $w_1(x)$, $w_2(x)$, diventa $f'(w_1(x))=\frac{1}{w_1(x)}=$ $=\frac{1}{x-3}$, $f'(w_2(x))=\frac{1}{w_2(x)}=\frac{1}{x^2-9}$. Inoltre,

$$w_1'(x)=D(x)-D(3)=1-0=1, \quad w_2'(x)=D(x^2)-D(9)=2x-0=2x.$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$D(\ln(x-3)) = f'(w_1(x))\cdot w_1'(x) = \frac{1}{x-3}\cdot 1 = \frac{1}{x-3};$$

$$D(\ln(x^2-9)) = f'(w_2(x))\cdot w_2'(x) = \frac{1}{x^2-9}\cdot(2x) = \frac{2x}{x^2-9}.$$ Quindi

$$\tilde{\ell}_{22} = \lim_{x\to 3^+} \frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{2x}{x^2-9}} = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}\cdot\frac{x^2-9}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{(x+3)\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\cdot 2x} = \frac{3+3}{2\cdot 3} = \frac{6}{6} = 1.$$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sulle derivate (e i limiti)

Calcolare, con la regola de l'Hôpital, i seguenti limiti

$\boxed{D23)\ \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}}$ Osserviamo che $(-2)^2+5\cdot(-2)+6=$ $=4-10+6=0$; $(-2)^2+4\cdot(-2)+4=$ $=4-8+4=0$. È una forma $0/0$.

Si ha: $\tilde{D}23) = \lim_{x\to -2^-} \frac{D(x^2+5x+6)}{D(x^2+4x+4)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{D(x^2)+5\cdot \overset{1}{D(x)}+\overset{0}{D(6)}}{D(x^2)+4\cdot \underset{=1}{D(x)}+\underset{=0}{D(4)}} =$

$= \lim_{x\to -2^-} \frac{2x+5}{2x+4} = \frac{2\cdot(-2)+5}{2\cdot(-2)+4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

(N.B.: se $x\to -2^-$, allora $2x\to -4^-$ (dallo stesso verso, cioè da sinistra, perché è stata fatta la moltiplicazione per 2, che è una costante positiva) e allora aggiungendo 4 si ha $2x+4\to -4+4=0^-$ dallo stesso verso)

$\boxed{D24)\ \lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}}$ Si ha: $(-3)^2+5\cdot(-3)+6=9-15+6=0$; $(-3)^2+6\cdot(-3)+9=9-18+9=0$. È forma $\frac{0}{0}$.

Si ha: $\tilde{D}24) = \lim_{x\to -3^+} \frac{D(x^2+5x+6)}{D(x^2+6x+9)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{D(x^2)+5\cdot \overset{1}{D(x)}+\overset{0}{D(6)}}{D(x^2)+6\ \underset{=1}{D(x)}+\underset{=0}{D(9)}} =$

$= \lim_{x\to -3^+} \frac{2x+5}{2x+6} = \frac{2\cdot(-3)+5}{2\cdot(-3)+6} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

(N.B.: se $x\to -3^+$, allora $2x\to -6^+$ (dallo stesso verso, cioè da destra, perché abbiamo moltiplicato per 2, che è una costante positiva) e allora aggiungendo 6 si ha $2x+6\to -6+6=0^+$ dallo stesso verso).

$\boxed{D25)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}}$ Osserviamo che $(+\infty)^2+5\cdot(+\infty)+6=(+\infty)+(+\infty)+6=+\infty$, $(+\infty)^2+4\cdot(+\infty)+4=(+\infty)+(+\infty)+4=+\infty$. Si ha, passando alle derivate (vedi esercizio D 12)

$\tilde{D}25) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+5}{2x+4} = \left(\begin{matrix} 2\cdot(+\infty)+5=(+\infty)+5=+\infty \\ 2\cdot(+\infty)+4=(+\infty)+4=+\infty \end{matrix}\right) \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{D(2x+5)}{D(2x+4)} =$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2\overset{=1}{D(x)}+D(5)_{=0}}{2\underset{=1}{D(x)}+D(4)_{=0}} = \frac{2}{2} = 1.$

Esercizio

Calcolare $\tilde{l}_{26} = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-7} - \sqrt{x-8}\right)$.

Siccome $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $(+\infty) - 7 = +\infty$, $(+\infty) - 8 = +\infty$, siamo davanti a una forma indeterminata $(+\infty) - (+\infty)$. TRUCCO: Ricordiamo che $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$, e quindi $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$.

Prendiamo $a = \sqrt{x-7}$, $b = \sqrt{x-8}$. Si ha: $a^2 = x-7$, $b^2 = x-8$, $a^2 - b^2 = (x-7) - (x-8) = \cancel{x}-7-\cancel{x}+8 = 1$.

Pertanto $\tilde{l}_{26} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a^2-b^2}{a+b} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-7}+\sqrt{x-8}} =$

$$= \frac{1}{(+\infty)+(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sui limiti

ESERCIZI SUI LIMITI DI UNA FUNZIONE

Esercizio 37. $l_{37} = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1} - x \right)$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $(+\infty)-(+\infty)$. Applichiamo allora il seguente trucco: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$, ove $a = \sqrt{x^2+4x+1}$, $b = x$.

Si ha (dove ha senso): $a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{\cancel{x^2}+4x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$.

Quindi $l_{37} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$. Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse $4x$, mentre il denominatore si comporta come se fosse $\sqrt{x^2}+x = x+x = 2x$ (notiamo che x tende a $+\infty$, e per i numeri positivi o nulli si ha: $\sqrt{x^2} = x$). Quindi $l_{37} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x} = 2$.

Esercizio 38. $l_{38} = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+6x} - \sqrt{x^2-3} \right)$.

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $(+\infty)-(+\infty)$. Applichiamo il trucco $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$, ove $a = \sqrt{x^2+6x}$, $b = \sqrt{x^2-3}$, e quindi $a^2 = x^2+6x$, $b^2 = x^2-3$. Quindi $a-b = \frac{\cancel{x^2}+6x-\cancel{x^2}+3}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2-3}}$. Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come $6x$, e il denominatore si comporta come $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2} = -x+(-x) = -2x$. Notiamo che, poiché $x \to -\infty$, x può essere considerato negativo, e quindi si ha: $\sqrt{x^2} = -x$. Pertanto si ha: $l_{38} = \lim_{x \to -\infty} \frac{6x}{-2x} = -3$.

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sui limiti

ESERCIZI SUI LIMITI DI UNA FUNZIONE

Esercizio 29 $\quad \tilde{\ell}_{29} = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - x \right)$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Applichiamo il trucco (dove ha senso) $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}$, ove $a = \sqrt{4x^2+1}$, $b = x$, $a^2 - b^2 = 4x^2 + 1 - x^2 = 3x^2 + 1$. Si ha:
$\tilde{\ell}_{29} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+1}{\sqrt{4x^2+1} + x}$. Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse $3x^2$, mentre il denominatore si comporta come $\sqrt{4x^2} + x = 2x + x = 3x$ (teniamo conto che $x \to +\infty$, quindi x può essere considerato positivo, e quindi $\sqrt{4x^2} = \sqrt{(2x)^2} = 2x$).
Quindi $\tilde{\ell}_{29} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{3x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Esercizio 30 $\quad \tilde{\ell}_{30} = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{3-x} - \sqrt{1-x} \right)$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Applichiamo il trucco $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}$, con $a = \sqrt{3-x}$, $b = \sqrt{1-x}$, $a^2 - b^2 = 3 - x - 1 + x = 2$. Si ha:

$$\tilde{\ell}_{30} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{\sqrt{3-x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{(+\infty) + (+\infty)} = \frac{2}{+\infty} =$$

$= 0$ (Notiamo che, quando $x \to -\infty$, allora $-x \to +\infty$, quindi $\sqrt{3-x}$ e $\sqrt{1-x}$ tendono a $+\infty$).

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sui limiti di una funzione

Esercizio 31: $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x^2-5x}{1-x}\right) = \tilde{\ell}_{31}$

Sia $\tilde{L}_{31} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x}{1-x}$. Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse x^2 e il denominatore si comporta come se fosse $-x$. Quindi $\tilde{L}_{31} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$. Visto che $\tilde{L}_{31} = +\infty$ e che $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, allora $\tilde{\ell}_{31} = (\ln +\infty) = +\infty$.

Esercizio 32: $\tilde{\ell}_{32} = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-x^3-4x^2+2)$.

Sia $\tilde{L}_{32} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3-4x+2)$. Per il principio di sostituzione degli infiniti, si ha: $\tilde{L}_{32} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3) = -(-\infty) = +\infty$. Da qui, procedendo analogamente come nell'esercizio precedente, si ottiene: $\tilde{\ell}_{32} = +\infty$.

Esercizio 33: $\tilde{\ell}_{33} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$. Sia $\tilde{L}_{33} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1}$.

Per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse x^2 e il denominatore come se fosse x. Pertanto $\tilde{L}_{33} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. Poiché $\tilde{L}_{33} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, allora $\tilde{\ell}_{33} = (e^{-\infty}) = 0$.

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi 4.III limiti di una funzione

Esercizio 34: $\tilde{l}_{34} = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{\frac{3x}{x-2}}$

Innanzi tutto osserviamo che, poiché $x \to 2^+$, si ha $x-2 \to 0^+$.
"Sostituendo" x con 2, otteniamo $\sqrt{\frac{6}{0^+}} = \frac{\sqrt{6}}{0^+} = +\infty$.
Pertanto $\tilde{l}_{34} = +\infty$.

Esercizio 35: $\tilde{l}_{35} = \lim_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{1-x}{x+4}\right)$
Calcoliamo innanzi tutto il limite $\tilde{L}_{35} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1-x}{x+4}$
Il numeratore tende a 0 dalla destra (perché c'è $-x$ con il segno cambiato). Il denominatore tende a 5, e allora $\tilde{L}_{35} = \frac{0}{5} = 0$.
Poiché $\lim_{x \to 1^-} \frac{1-x}{x+4} = 0^{(+)}$, ed inoltre $\lim_{y \to 0^+} \ln y = -\infty$
(Qui, $y = \frac{1-x}{x+4}$), allora $\tilde{l}_{35} = \lim_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{1-x}{x+4}\right) = -\infty$.

Esercizio 36: $\tilde{l}_{36} = \lim_{x \to 1^+} e^{\frac{x+2}{x-1}}$
Calcoliamo innanzi tutto il limite $\tilde{L}_{36} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1}$.
"Sostituendo" x con 1, al numeratore abbiamo 3 (da destra), mentre al denominatore abbiamo 0 da destra, cioè 0^+. Allora $\tilde{L}_{36} = \frac{3}{0^+} = +\infty$ (per la regola dei segni). Da ciò si ottiene: $\tilde{l}_{36} = \lim_{x \to 1^+} e^{\frac{x+2}{x-1}} = e^{\tilde{L}_{36}} = e^{+\infty} = +\infty$

Esercizio 37: $\tilde{l}_{37} = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{x+2}{x-1}}$
Calcoliamo innanzi tutto $\tilde{L}_{37} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x-1}$. "Sostituendo" x con 1, al numeratore si ha 3 (da sinistra), mentre al denominatore abbiamo 0 da sinistra, cioè 0^-. Allora $\tilde{L}_{37} = \frac{3}{0^-} = -\infty$ (per la regola dei segni), e quindi $\tilde{l}_{37} = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{x+2}{x-1}} = e^{\tilde{L}_{37}} = e^{-\infty} = 0$.

DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi sui Limiti

Esercizio 38 $\tilde{l}_{38} = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2-1}\right)$

Notiamo che $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+x^2}{x^2-1}\right) = 1$; infatti, per il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse x^2, mentre il denominatore si comporta come x^2: quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2}{x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Il logaritmo è una funzione continua

Siccome, detto in modo semplice, « il limite del logaritmo è uguale al logaritmo del limite », allora $\tilde{l}_{38} = \ln 1 = 0$.

Esercizio 39 $\tilde{l}_{39} = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2-1}\right)$

Procedendo analogamente come nell'esercizio 38, si può vedere che $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1+x^2}{x^2-1}\right) = 1$, e quindi

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2-1}\right) = \ln\left(\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{1+x^2}{x^2-1}\right)\right) = \ln 1 = 0$$

Esercizio 40: $\tilde{l}_{40} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x \cos x}$. Teniamo conto del limite notevole $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Ponendo $t = 2x$, e notando che $t \to 0$ se e solo se $x \to 0$, otteniamo $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$

Quindi $\tilde{l}_{40} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin(2x)}{2x \cos x} = 2 \cdot$
$\cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\underset{\overset{\|}{1}}{\cos 0}} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$

DALL'ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi su limiti

Esercizio 41 $\quad \tilde{l}_{41} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.
Applichiamo il trucco $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
con $a=\sqrt{x}$, $b=1$. Si ha: $\tilde{l}_{41} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1)} =$
$= \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

Esercizio 42 $\quad \tilde{l}_{42} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{3e^x-5}{1+4e^x}$

Applicando il principio di sostituzione degli infiniti, il numeratore si comporta come se fosse $3e^x$ mentre il denominatore si comporta come se fosse $4e^x$.
Pertanto $\tilde{l}_{42} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{3e^x}{4e^x} = \dfrac{3}{4}$

Esercizio 43 $\quad \tilde{l}_{43} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{3e^x-5}{1+4e^x}$

Teniamo conto del fatto che $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ (con scrittura impropria, $e^{-\infty}=0$).
Si ha: $\tilde{l}_{43} = \dfrac{0-5}{1+0} = \dfrac{-5}{1} = -5$.

ESERCIZIO (Funz. 3)

Data la funzione

$$f(x) = (x-1)^3 \cdot (2-x)$$

si chiede di:

a) determinare il dominio di f;
b) studiare il segno di f e le eventuali intersezioni con gli assi;
c) determinare gli eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui;
d) calcolare la derivata (prima) di f;
e) determinare gli intervalli/semirette di crescenza/decrescenza per f e gli eventuali punti di massimo/minimo;
f) calcolare la derivata seconda di f;
g) determinare gli intervalli/semirette di concavità/convessità per f e gli eventuali punti di flesso;
h) tracciare il grafico di f.

ESERCIZIO - Svolgere lo studio della seguente funzione.

Sia $f(x) = (x-1)^3 \cdot (2-x)$.

a) Il campo di definizione (o dominio) di f è tutto $\mathbb{R}$.

b) La funzione f si annulla nei punti 1 e 2, e quindi i punti $(1,0)$ e $(2,0)$ sono i due punti di intersezione del grafico di f con l'asse delle x. Inoltre $f(0) = (-1)^3 \cdot 2 = -2$, e quindi il punto $(0,2)$ è l'(unica) intersezione del grafico di f con l'asse delle y. Studiamo ora il segno di f. Si ha:

		1		2	
$(x-1)^3$	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Pertanto f è negativa in $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ e positiva in $]1, 2[$.

c) Vediamo dapprima gli asintoti orizzontali. Si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

e pertanto non vi sono asintoti orizzontali.

Vediamo ora gli asintoti obliqui. Si ha:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)^3 \cdot (2-x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (x-1)^3 \cdot$$

$$\cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2-x}{x} = (\pm\infty) \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right) = (\pm\infty) \cdot (-1) = \mp\infty,$$

e quindi non esistono asintoti obliqui.

Inoltre, poiché f è continua in tutto $\mathbb{R}$, f non ha asintoti verticali.

d) Ricordiamo che $f(x) = (x-1)^3 \cdot (2-x)$. Si ha, in virtù della formula di derivazione del prodotto,

$$f'(x) = [D((x-1)^3)] \cdot (2-x) + (x-1)^3 \cdot D(2-x)$$

Si ha: $D(2-x) = D(2) - D(x) = 0 - 1 = -1$.

Calcoliamo ora $D((x-1)^3)$. Si tratta della derivata di funzioni composte. Poniamo come funzione "esterna" $\varphi(w) = w^3$, e come funzione "interna" $w(x) = x-1$.

Si ha: $\varphi'(w) = 3w^2$, che calcolata in $w(x) = x-1$ diventa $\varphi'(w(x)) = 3 \cdot (x-1)^2$. Inoltre $w'(x) = D(x-1) = D(x) - D(1) = 1 - 0 = 1$.

Pertanto, per il teorema di derivazione delle funzioni composte, $D((x-1)^3) = \varphi'(w(x)) \cdot w'(x) = 3 \cdot (x-1)^2 \cdot 1 = 3 \cdot (x-1)^2$. Quindi

$$\boxed{f'(x)} = 3 \cdot (x-1)^2 \cdot (2-x) + (x-1)^3 \cdot (-1) = (x-1)^2 \cdot (6-3x-x+1) =$$

$$= \boxed{(x-1)^2 \cdot (-4x+7)}$$. Quindi $f'(1) = 0$, e per $\underline{x \neq 1}$ si ha che

$f'(x) > 0 \overset{\text{se e}}{\underset{\text{solo se}}{\iff}} -4x+7 > 0 \iff 4x-7 < 0 \iff x < \frac{7}{4}$. Analogamente,

$f'(x) < 0 \iff x > \frac{7}{4}$, ed $f'\left(\frac{7}{4}\right) = 0$. Quindi $f'(x) > 0$ per $x < 1$; $f'(1) = 0$; $f'(x) > 0$ per $1 < x < \frac{7}{4}$; $f'\left(\frac{7}{4}\right) = 0$; $f'(x) < 0$ per $x > \frac{7}{4}$.

e) Pertanto, per il test di monotonia, f è strettamente crescente in $]-\infty, 1]$, f è strettamente crescente in $[1, \frac{7}{4}]$ (e quindi f è strettamente crescente in $]-\infty, \frac{7}{4}]$), ed f è strettamente decrescente in $[\frac{7}{4}, +\infty[$. Il punto $x = \frac{7}{4}$ è un punto di massimo,

DERIVATA SECONDA

f) Ricordiamo che (per ogni $x \in \mathbb{R}$) $f'(x) = (x-1)^2 \cdot (-4x+7)$, e quindi, essendo la derivata seconda la derivata della derivata prima, per la formula di derivazione del prodotto si ha

$$f''(x) = \left[D\left((x-1)^2\right)\right] \cdot (-4x+7) + (x-1)^2 \cdot D(-4x+7)$$

Notiamo che $D(-4x+7) = (-4) D(x) + D(7) = (-4) \cdot 1 + 0 = -4$.

Calcoliamo ora $D\left((x-1)^2\right)$, derivata di funzioni composte. Prendiamo come funzione "esterna" $\varphi(w) = w^2$, e come funzione "interna" $w(x) = x-1$. Si ha: $\varphi'(w) = 2w$, che calcolata in $w(x) = x-1$ diventa $\varphi'(w(x)) = 2 \cdot (x-1) = 2x-2$. Inoltre, $w'(x) = D(x-1) = D(x) - D(1) = 1 - 0 = 1$. Pertanto, per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$D\left((x-1)^2\right) = \varphi'(w(x)) \cdot w'(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot 1 = 2(x-1) = 2x-2$$

N.B.: $D\left((x-1)^2\right)$ si può anche calcolare nel seguente modo:

$$\boxed{D\left((x-1)^2\right)} = D(x^2 - 2x + 1) = D(x^2) - 2\underbrace{D(x)}_{=1} + \underbrace{D(1)}_{=0} = \boxed{2x-2}$$

$f''(x) = 2(x-1) \cdot (-4x+7) - 4(x-1)^2$. A questo punto, siccome studiamo il <u>SEGNO</u> della derivata seconda, non conviene "sviluppare", ma conviene "raccogliere" il termine $x-1$. Si ha:

$$f''(x) = (x-1) \cdot (-8x+14) - (x-1) \cdot (4x-4) = (x-1) \cdot (-8x+14-4x+4) =$$
$$= (x-1) \cdot (-12x+18) = 6(x-1) \cdot (-2x+3).$$

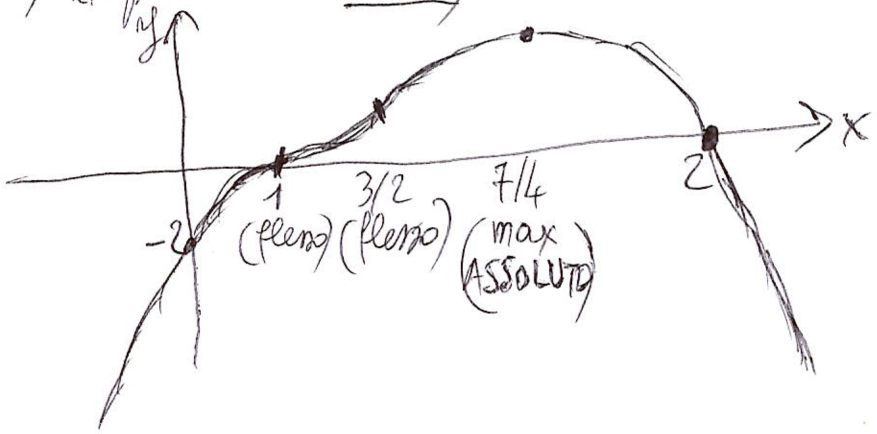
Vediamo il segno. È:

		1		3/2	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$-2x+3$	$+$		$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

cioè $f''(x) < 0$ per $x < 1$, $f''(1) = 0$, $f''(x) > 0$ per $1 < x < \frac{3}{2}$, $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, $f''(x) < 0$ per $x > \frac{3}{2}$.

g) Pertanto f è concava $(\cap)$ (cioè rivolge la concavità verso il basso) in $]-\infty, 1]$, f è convessa $(\cup)$ (cioè rivolge la concavità verso l'alto) in $[1, \frac{3}{2}]$, f è concava in $[\frac{3}{2}, +\infty[$. I punti $x=1$ ed $x=\frac{3}{2}$ sono i due punti in corrispondenza dei quali la nostra funzione f "cambia di concavità", cioè i due punti di flesso.

h) GRAFICO di f (il disegno <u>non</u> è in <u>proporzione</u>, ma quello che importa è l'<u>IDEA</u>)



47

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x+3}}{x-2}$$

fino alla derivata seconda e tracciarne il grafico. Indicare gli eventuali punti di minimo, di massimo (relativi o assoluti) e di flesso.

SOLUZIONE:

CLASSIFICAZIONE. È una funzione razionale fratta ed esponenziale, poiché la variabile indipendente x compare sia al denominatore della frazione che all'esponente della funzione.

DOMINIO. Poiché nella funzione compare una frazione, per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che il denominatore sia diverso da zero, e pertanto si deve avere:

$$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2.$$

Il dominio della funzione é $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI. Con l'asse y abbiamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{e^{x+3}}{x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{e^3}{2} \end{cases}$$

Con l'asse x non abbiamo intersezione perchè $e^{x+3} > 0 \ \forall x \in D_f$.

Pertanto la funzione interseca gli assi cartesiani solamente nel punto di coordinate $A(0; -\frac{e^3}{2})$.

SEGNO.

$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{e^{x+3}}{x-2} > 0$$

$$\text{Num.} > 0 \Leftrightarrow e^{x+3} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in D_f$$

$$\text{Den.} > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2.$$

Ossia

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in]2; +\infty[, \text{ ed } f(x) < 0 \text{ per } x \in]-\infty, 2[.$$

Dallo studio del segno si osserva subito che la funzione non presenta particolari simmetrie.

COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE IN PUNTI PARTICOLARI DEL DOMINIO. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono 2, $-\infty$, $+\infty$.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{e^{x+3}}{x-2} = +\infty \quad \left(= \frac{\text{numero positivo}}{0^+}\right)$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{e^{x+3}}{x-2} = -\infty \left(= \frac{\text{numero positivo}}{0^-}\right)$$

Avendo ottenuto due risultati infiniti per x tendente ad un valore finito (da destra e da sinistra), si può concludere che la retta di equazione $x = 2$ è un asintoto verticale per la funzione.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+3}}{x-2} = +\infty, \text{ perché l'esponenziale è più veloce.}$$

Mentre si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x+3}}{x-2} = 0 \left(\text{forma } \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0\right)$$

Possiamo concludere che la funzione ammette come asintoto orizzontale la retta $y = 0$ quando $x \to -\infty$.

Non vi sono asintoti obliqui poichè $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$. $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+3}}{x(x-2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \cdot e^3}{x^2 - 2x} = +\infty$ (vince l'esponenziale)

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA. Abbiamo che:

$$f'(x) = \frac{e^{x+3}(x-2) - e^{x+3}}{(x-2)^2} = \frac{e^{x+3}(x-3)}{(x-2)^2}.$$

infatti, sia $\boxed{f(x) = \frac{e^{x+3}}{x-2}}$.

Poniamo $w(x) = x+3$ (funzione "interna")
$\varphi(w) = e^{w}$ (funzione "esterna"). Si ha: $\varphi'(w) = e^{w}$,
che calcolato nel punto $w(x)$ diventa $\varphi'(w(x)) = e^{w(x)} =$
$= e^{x+3}$. Inoltre, $w'(x) = D(x+3) = D(x) + D(3) = 1 + 0 = 1$.
Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha
$\boxed{D(e^{x+3})} = \varphi'(w(x)) \cdot w'(x) = e^{x+3} \cdot 1 = \boxed{e^{x+3}}$.

N.B.: Un altro procedimento per calcolare $D(e^{x+3})$ è il seguente, dove si usano le proprietà delle potenze:
$D(e^{x+3}) = D(e^{x} \cdot e^{3}) = e^{3} \cdot D(e^{x})$ (la costante moltiplicativa e^{3} viene portata fuori dal segno di derivata) $= e^{3} \cdot e^{x} = \boxed{e^{x+3}}$.

Adesso, tenendo conto che $\boxed{D(e^{x+3}) = e^{x+3}}$ e applicando la formula della derivata del quoziente, si ottiene

N.B. $D(x-2) = D(x) - D(2) = 1 - 0 = 1$

$$f'(x) = \frac{[D(e^{x+3})] \cdot (x-2) - [D(x-2)] \cdot e^{x+3}}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{e^{x+3} \cdot (x-2) - 1 \cdot e^{x+3}}{(x-2)^2} = \frac{e^{x+3}(x-3)}{(x-2)^2}$$

Studiamo il segno della derivata prima: poniamo $f'(x) > 0$, ossia

$$\frac{e^{x+3}(x-3)}{(x-2)^2} > 0,$$

poiché $\frac{e^{x+3}}{(x-2)^2} > 0$ per ogni x appartenente al dominio, è sufficiente porre

$$f'(x) > 0 \overset{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow} x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente decrescente per $x \in]-\infty; 2[$ e per $x \in]2,3]$, mentre f è strettamente crescente per $x \in [3; +\infty[$. (N.B.: f non è definita nel punto 2)
Inoltre $x = 3$ è un punto di minimo relativo. Il minimo relativo della funzione vale $f(3) = e^6$ (è un estremo relativo poiché la f tende a $-\infty$ ~~a sinistra di 2)~~ quando x tende a 2 da sinistra).

STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA. Abbiamo che: (vedi anche sotto per i passaggi più in dettaglio)

$$f''(x) = \frac{e^{x+3}(x-3)(x-2)^2 + e^{x+3}(x-2)^2 - e^{x+3}(x-3)(x-2)2}{(x-2)^4} = \frac{e^{x+3}(x^2-6x+10)}{(x-2)^3}.$$

Studiamo il segno della derivata seconda: poniamo $f''(x) > 0$, ossia

$$\frac{e^{x+3}(x^2-6x+10)}{(x-2)^3},$$

poiché $e^{x+3} > 0$ per ogni x appartenente al dominio,

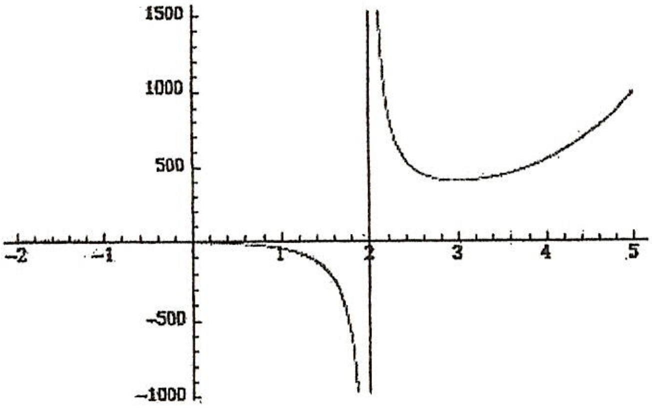
Num. $> 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 > 0 \Rightarrow \forall x \in D_f$ siccome il delta dell'equazione è negativo e la concavità della parabola è rivolta verso l'alto.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0$$

$$\text{Den.} > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Possiamo concludere che la funzione f volge la concavità verso il basso per $x \in]-\infty; 2[$, mentre f volge la concavità verso l'alto per $x \in]2; +\infty[$.
Poiché $2 \notin D_f$ la funzione non ha punti di flesso.
(Ricordiamo che D_f è il dominio di f)

GRAFICO.



$$f''(x) = D(f'(x)) = \frac{D(e^{x+3}(x-3)) \cdot (x-2)^2 - e^{x+3}(x-3) D((x-2)^2)}{(x-2)^4} =$$

$$\frac{e^{x+3}(x-3)(x-2)^{\cancel{2}} + e^{x+3}(x-2)^{\cancel{2}} - 2e^{x+3}(x-3)\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{e^{x+3}(x^2-3x-2x+6+x-2-2x+6)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{e^{x+3}(x^2-6x+10)}{(x-2)^3}$$

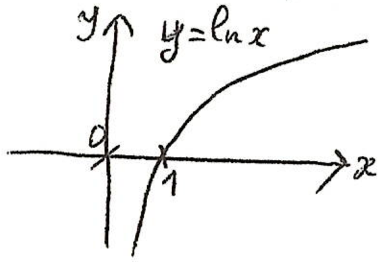
Esercizio: Fare lo studio della funzione

$$f_2(x) = x^2 \ln x$$

- DOMINIO: c'è la limitazione relativa al logaritmo: il suo argomento

dev'essere strettamente positivo, cioè $\boxed{x>0}$. Pertanto il campo di esistenza di f_2 è $]0, +\infty[$ (lo scriviamo nella forma di una semiretta)

- SEGNO DELLA FUNZIONE. Il dominio di f_2 è $]0, +\infty[$, ed allora x^2 è sempre positivo. Quindi il segno della funzione sarà uguale al segno di $\ln x$. Ricordando il grafico della funzione logaritmo



avremo che

$f_2(x) < 0$ se e solo se $0<x<1$

$f_2(x) = 0$ se e solo se $x=1$

$f_2(x) > 0$ se e solo se $x>1$

Abbiamo una sola intersezione con l'asse delle x, cioè $(1,0)$.
Non ci sono intersezioni con l'asse delle y, perché $f_2(0)$ non è definita.

- ASINTOTI. Ricordiamo che il dominio di f_2 è $]0, +\infty[$.
Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \ln x = (+\infty)^2 \cdot (+\infty) = +\infty$: non esistono asintoti orizzontali. (V. sempre l'algebra dei limiti)

- Asintoti obliqui. Si ha: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}^{x} \ln x}{\cancel{x}} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$

quindi non ci sono asintoti obliqui.

- Asintoti verticali. Si ha: $\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x \overset{(*)}{=}$

(forma indeterminata $0\cdot(-\infty)$, poniamo (trucco!) $\frac{1}{x} = t$.
Allora $x^2 = \frac{1}{t^2}$, e quando $x \to 0^+$ si ha che $t \to +\infty$)

$\overset{(*)}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} =$ (v. proprietà del logaritmo) $=$

$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\overset{0}{\cancel{\ln 1}} - \ln t}{t^2} \underset{\text{(Hôpital)}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{D(-\ln t)}{D(t^2)} =$

$= \lim_{t\to+\infty} \frac{-\frac{1}{t}}{2t} = \frac{0}{+\infty} = 0$ (v. algebra dei limiti)

Pertanto non esistono asintoti verticali.
[Si può vedere anche che $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0$ perché il logaritmo è più lento della funzione x^2, e quindi può essere trascurato rispetto alla funzione x^2, cioè: $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$]
(ma è meglio provarlo con de l'Hôpital!)

<u>Derivata prima</u>. Si ha: $f_2(x) = x^2 \ln x$. Applichiamo la formula della derivata del prodotto:

$$f_2'(x) = [D(x^2)] \cdot \ln x + x^2 \cdot D(\ln x) = 2x \ln x + \cancel{x^2}^{\,x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} =$$

$= x \cdot (2 \ln x + 1)$. Visto che x è sempre positiva, si ha:
$f_2'(x) > 0$ se e solo se $2 \ln x + 1 > 0$ se e solo se $2 \ln x > -1$ se e solo se $\ln x > -\frac{1}{2}$ se e solo se $x > e^{-\frac{1}{2}}$ (ricordiamo che la funzione $\ln x$ è strettamente crescente, come anche la sua inversa e^x). Per il test di

<u>MONOTONIA</u>, f_2 è strettamente crescente in $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.
Analogamente si ha che $f_2'(x) < 0$ se e solo se $(0<)x < e^{-\frac{1}{2}}$, e quindi f_2 è strettamente decrescente in $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$. Il punto $e^{-\frac{1}{2}}$ è un punto di minimo (che sarà assoluto). Inoltre $f_2'(x) = 0$ se e solo se $x = e^{-\frac{1}{2}}$, ed è $f_2(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \cdot \ln(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-\frac{1}{2} \cdot 2} \cdot (-\frac{1}{2}) =$

$= -\frac{1}{2} e^{-1}$. Poiché $f_2(e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2} e^{-1}$, $-\frac{1}{2} e^{-1}$ è il valore minimo di f_2, allora f_2 <u>non</u> assume valori inferiori a $-\frac{1}{2} e^{-1}$.
Inoltre, siccome $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$, f_2 assume tutti i valori compresi fra $-\frac{1}{2} e^{-1}$ e $+\infty$, compreso $-\frac{1}{2} e^{-1}$ (questo, per il teorema dei valori intermedi)

li assume <u>una volta soltanto in</u> $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$, per la STRETTA CRESCENZA

Poiché $\lim_{x \to 0^+} f_2(x) = 0$ ed $f_2(e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}e^{-1}$, allora,

ancora una volta per il teorema dei valori intermedi, f_2 assume tutti i valori compresi fra 0 e $-\frac{1}{2}e^{-1}$, 0 escluso e $-\frac{1}{2}e^{-1}$ compreso: li assume <u>una volta soltanto</u> in $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$, per la STRETTA DECRESCENZA.

Quindi, se prendiamo un qualsiasi valore compreso fra 0 e $-\frac{1}{2}e^{-1}$, estremi esclusi, questo valore viene assunto <u>esattamente</u> DUE VOLTE DA f_2. Pertanto f_2, globalmente, <u>NON È INIETTIVA</u>.

Visto che il codominio di f_2 è $[-\frac{1}{2}e^{-1}, +\infty[$, allora la restrizione $f_2 : [e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[\longrightarrow [-\frac{1}{2}e^{-1}, +\infty[$ è iniettiva, perché <u>strettamente</u> crescente, e suriettiva, poiché il codominio di f_2 è $[-\frac{1}{2}e^{-1}, +\infty[$, e pertanto la restrizione considerata ammette la funzione inversa $f_2^{-1} : [-\frac{1}{2}e^{-1}, +\infty[\to [e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$, anch'essa strettamente crescente.

Vediamo ora la <u>derivata seconda</u>. Si ha: $f_2'(x) = x \cdot (2\ln x + 1)$, e allora, applicando la formula della derivata del prodotto, si ha

$$f_2''(x) = D(x \cdot (2\ln x + 1)) = \overset{1}{\boxed{D(x)}} \cdot (2\ln x + 1) + x \cdot D(2\ln x + 1) =$$
$$= 2\ln x + 1 + \cancel{x} \cdot \left(\frac{2}{\cancel{x}}\right) = 2\ln x + 3.$$

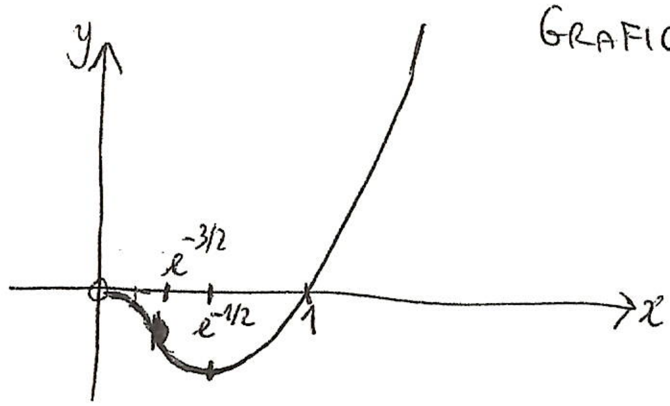
Si ha: $f_2''(x)=2\ln x+3>0$ se e solo se $2\ln x>-3$ se e solo se $\ln x>-\frac{3}{2}$ se e solo se $x>e^{-3/2}$ (ricordiamo che la funzione $\ln x$ è strettamente crescente, come anche la sua inversa e^x,

e quindi la disuguaglianza viene mantenuta con il suo segno senza che questo sia cambiato). Pertanto, per i legami esistenti tra convessità, concavità e derivata seconda

f_2 è convessa in $[e^{-3/2},+\infty[$. Analogamente, si ha: $f_2''(x)=2\ln x+3<0$ se e solo se $2\ln x<-3$ se e solo se $(0<)\,x<e^{-3/2}$, ed f_2 è concava in $]0,e^{-3/2}]$. Il punto $e^{-3/2}$ è un punto di FLESSO, dato che c'è il CAMBIO DI CONCAVITÀ in corrispondenza a questo punto

N.B.: Sempre per la monotonia della funzione e^x, si ha: $e^{-3/2}<e^{-1/2}$, in quanto $-\frac{3}{2}<-\frac{1}{2}$ (perché $\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$).

GRAFICO DI $f_2(x)=x^2\cdot\ln x$



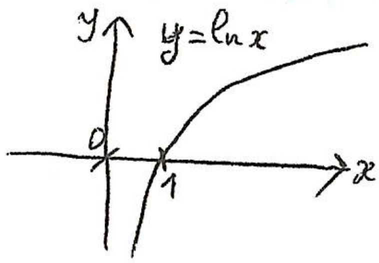
Esercizio: Fare lo studio della funzione

$$f_3(x) = x^3 \ln x$$

- DOMINIO: c'è la limitazione relativa al logaritmo, il cui argomento

dev'essere strettamente positivo, cioè $\boxed{x>0}$. Pertanto il campo di esistenza di f_3 è $]0, +\infty[$ (lo scriviamo nella forma di una semiretta)

- SEGNO DELLA FUNZIONE. Poiché il dominio di f_3 è $]0,+\infty[$, allora x^3 è sempre positivo. Quindi il segno della funzione sarà uguale al segno di $\ln x$. Ricordando il grafico della funzione logaritmo,



avremo che

$f_3(x) < 0$ se e solo se $0<x<1$

$f_3(x) = 0$ se e solo se $x=1$

$f_3(x) > 0$ se e solo se $x>1$

Abbiamo una sola intersezione con l'asse delle x, cioè $(1,0)$. Non ci sono intersezioni con l'asse delle y, perché $f_3(0)$ non è definita.

- ASINTOTI. Ricordiamo che il dominio di f_3 è $]0,+\infty[$.

Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \ln x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$: non esistono asintoti orizzontali.

— Asintoti obliqui. Si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_3(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overset{x^2}{\overset{\|}{\cancel{x^3}}} \ln x}{\cancel{x}} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$

quindi non ci sono asintoti obliqui.

— Asintoti verticali. Si ha: $\lim\limits_{x\to0^+} f_3(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x^3 \ln x \overset{(*)}{=} \ldots$

(forma indeterminata $0\cdot(-\infty)$, poniamo (trucco!) $\frac{1}{x} = t$.
Allora $x^3 = \frac{1}{t^3}$, e quando $x \to 0^+$ si ha che $t \to +\infty$)

$\overset{(*)}{\ldots} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t^3} =$ (v. proprietà del logaritmo)

$= \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\overset{0}{\overset{\|}{\cancel{\ln 1}}} - \ln t}{t^3} \underset{\text{(Hôpital)}}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{D(-\ln t)}{D(t^3)} =$

$= \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{-\frac{1}{t}}{3t^2} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$ (v. algebra dei limiti)

Pertanto non esistono asintoti verticali.
[Si può vedere anche che $\lim\limits_{x\to0^+} x^3 \ln x = 0$ perché il logaritmo è più lento della funzione x^3, e quindi può essere trascurato rispetto alla funzione x^3, cioè: $\lim\limits_{x\to0^+} x^3 \ln x = \lim\limits_{x\to0^+} x^3 = 0$]
ma è meglio provarlo con de l'Hôpital!

Derivata prima. Si ha: $f_3(x) = x^3 \ln x$. Applichiamo la formula della derivata del prodotto:

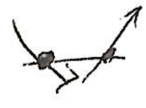
$$f_3'(x) = [D(x^3)] \cdot \ln x + x^3 \cdot D(\ln x) = 3x^2 \ln x + \cancel{x^3}^{\,x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} =$$

$= x^2(3 \ln x + 1)$. Visto che x^2 è sempre positiva, si ha: $f_3'(x) > 0$ se e solo se $3 \ln x + 1 > 0$ se e solo se $3 \ln x > -1$ se e solo se $\ln x > -\frac{1}{3}$ se e solo se $x > e^{-\frac{1}{3}}$ (ricordiamo che la funzione $\ln x$ è strettamente crescente, come anche la sua inversa e^x). Per il test di

Monotonia, f_3 è strettamente crescente in $[e^{-\frac{1}{3}}, +\infty[$. Analogamente si ha che $f_3'(x) < 0$ se e solo se $(0 <) x < e^{-\frac{1}{3}}$, e quindi f_3 è strettamente decrescente in $]0, e^{-\frac{1}{3}}]$. Il punto $e^{-\frac{1}{3}}$ è un punto di minimo (che sarà assoluto). Inoltre $f_3'(x) = 0$ se e solo se $x = e^{-\frac{1}{3}}$, ed è $f_3(e^{-\frac{1}{3}}) = (e^{-\frac{1}{3}})^3 \cdot \ln(e^{-\frac{1}{3}}) = e^{-\frac{1}{3}\cdot 3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) =$

$= -\frac{1}{3}e^{-1}$. Poiché $f_3(e^{-\frac{1}{3}}) = -\frac{1}{3}e^{-1}$, $-\frac{1}{3}e^{-1}$ è il valore minimo di f_3, allora f_3 non assume valori inferiori a $-\frac{1}{3}e^{-1}$. Inoltre, siccome $\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$, f_3 assume tutti i valori compresi fra $-\frac{1}{3}e^{-1}$ e $+\infty$, compreso $-\frac{1}{3}e^{-1}$ (Questo, per il teorema dei valori intermedi)

Li assume una volta soltanto in $[e^{-\frac{1}{3}}, +\infty[$, per la STRETTA CRESCENZA.
Poiché $\lim_{x \to 0^+} f_3(x) = 0$ ed $f_3(e^{-\frac{1}{3}}) = -\frac{1}{3}e^{-1}$, allora, ancora una volta per il teorema dei valori intermedi, f_3 assume tutti i valori compresi fra 0 e $-\frac{1}{3}e^{-1}$, 0 escluso e $-\frac{1}{3}e^{-1}$ compreso: li assume una volta soltanto in $]0, e^{-\frac{1}{3}}]$, per la STRETTA DECRESCENZA.

Quindi, se prendiamo un qualsiasi valore compreso fra 0 e $-\frac{1}{3}e^{-1}$, estremi esclusi, questo valore viene assunto esattamente  DUE VOLTE DA f_3. Pertanto f_3, globalmente, NON È INIETTIVA.

Visto che il codominio di f_3 è $[-\frac{1}{3}e^{-1}, +\infty[$, allora la restrizione $f_3 : [e^{-\frac{1}{3}}, +\infty[\longrightarrow [-\frac{1}{3}e^{-1}, +\infty[$ è iniettiva, perché strettamente crescente, e suriettiva, poiché il codominio di f_3 è $[-\frac{1}{3}e^{-1}, +\infty[$, e pertanto la restrizione considerata ammette la funzione inversa $f_3^{-1} : [-\frac{1}{3}e^{-1}, +\infty[\to [e^{-\frac{1}{3}}, +\infty[$, anch'essa strettamente crescente.

Vediamo ora la derivata seconda. Si ha: $f_3'(x) = x^2 \cdot (3\ln x + 1)$, e allora, applicando la formula della derivata del prodotto, si ha:

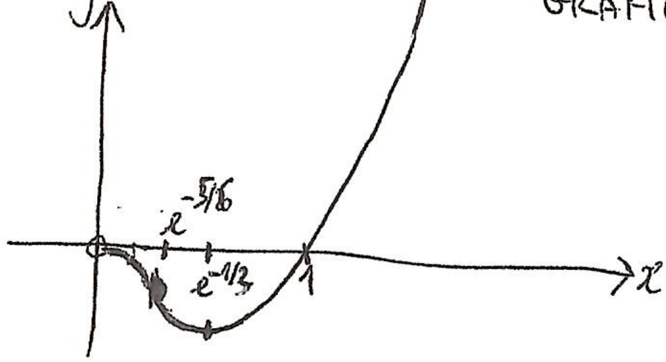
$$\boxed{f_3''(x)} = D(x^2 \cdot (3\ln x + 1)) = (D(x^2))(3\ln x + 1) + x^2 \cdot D(3\ln x + 1) =$$
$$= 2x(3\ln x + 1) + \cancel{x^2}^{\,x}\left(\frac{3}{\cancel{x}}\right) = 6x\ln x + 2x + 3x = 6x\ln x + 5x =$$
$$= \boxed{x(6\ln x + 5)}$$

Si ha: $f_3''(x) = x \cdot (6\ln x + 5) > 0$ se e solo se ($\Leftrightarrow$) $6\ln x + 5 > 0$ (in quanto è sempre $x > 0$ nel dominio di f_3), se e solo se $6\ln x > -5 \Leftrightarrow \ln x > -5/6 \Leftrightarrow x > e^{-5/6}$

(ricordiamo che la funzione $\ln x$ è strettamente crescente, come anche la sua inversa e^x è strettamente crescente, e quindi la disuguaglianza viene mantenuta con il suo segno senza che questo sia cambiato). Pertanto, per i legami esistenti tra convessità, concavità e derivata seconda, abbiamo che f_3 è convessa in $[e^{-5/6}, +\infty[$. Analogamente, si ha: $f_3''(x) = x(6\ln x + 5) < 0$ se e solo se $6 \ln x < -5$ se e solo se $(0<) x < e^{-5/6}$, ed f_3 è concava in $]0, e^{-5/6}]$. Il punto $e^{-5/6}$ è un punto di FLESSO, dato che c'è il CAMBIO DI CONCAVITÀ in corrispondenza a questo punto

N.B.: Sempre per la monotonia della funzione e^x, si ha: $e^{-5/6} < e^{-1/3}$, in quanto $-\frac{5}{6} < -\frac{1}{3}$ (perché $\underset{0,8\overline{3}}{\frac{5}{6}} > \underset{0,\overline{3}}{\frac{1}{3}}$).

GRAFICO DI $f_3(x) = x^3 \cdot \ln x$



DALL' ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizio sulle derivate Calcolare le derivate di:

ESERCIZIO D 24) $f_{24}(x) = \frac{x^2 - 3\cos x}{x}$

Applicando la regola di derivazione del quoziente, si ha

$$f'_{24}(x) = \frac{D(x^2 - 3\cos x)\cdot x - \overset{1}{D(x)}\cdot(x^2 - 3\cos x)}{x^2} =$$

$$= \frac{(D(x^2) - 3D(\cos x))\cdot x - x^2 + 3\cos x}{x^2} =$$

$$= \frac{(2x + 3\sin x)\cdot x - x^2 + 3\cos x}{x^2} = \frac{2x^2 + 3x\sin x - x^2 + 3\cos x}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 3x\sin x + 3\cos x}{x^2}$$

ESERCIZIO D 25) $f_{25}(x) = (x^3 - x^2 + 2x)\cdot \sin x$

Applicando la formula di derivazione del prodotto, è

$$f'_{25}(x) = [D(x^3 - x^2 + 2x)]\cdot \sin x + (x^3 - x^2 + 2x)\cdot D(\sin x)$$

$$= (3x^2 - 2x + 2\cdot \underbrace{D(x)}_{=1})\cdot \sin x + (x^3 - x^2 + 2x)\cdot \cos x =$$

$$= (3x^2 - 2x + 2)\cdot \sin x + (x^3 - x^2 + 2x)\cdot \cos x.$$

ESERCIZIO D 26) $f_{26}(x) = \cos^5 x = (\cos x)^5$

Applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte. Prendiamo come funzione "interna" $w(x) = \cos x$, e come funzione "esterna" $f(w) = w^5$. Si ha: $w'(x) = -\sin x$, $f'(w) = 5w^4$, che calcolata in $w(x)$ diventa $f'(w(x)) = 5(\cos x)^4 = 5\cdot\cos^4 x$. Per la formula di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$f'_{26}(x) = f'(w(x))\cdot w'(x) = 5\cdot\cos^4 x\cdot(-\sin x) = \boxed{(-5)(\cos^4 x)\cdot(\sin x)}$$

ESERCIZIO: Studiare la parabola

$$\phi_1(x) = x^2 + 18x + 80$$

come studio di funzione (N.B.: $a=1, b=18, c=80$)

Il dominio è tutto $\mathbb{R}$. Per il segno della funzione e le intersezioni con l'asse delle x, risolviamo l'equazione

$$x^2 + 18x + 80 = 0$$

e le corrispondenti disequazioni $\begin{cases} x^2 + 18x + 80 > 0 \\ x^2 + 18x + 80 < 0 \end{cases}$

Si ha: $\Delta = b^2 - 4ac = 324 - 320 = 4 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 \pm 2}{2} \begin{array}{l} \nearrow -10 \\ \searrow -8 \end{array}$$

Le soluzioni sono: $x_1 = -10$, $x_2 = -8$.

La funzione ϕ_1 assume valori positivi per $x < -10$ oppure $x > -8$ (cioè $x \in]-\infty, -10[\cup]-8, +\infty[$: valori esterni); negativi per $-10 < x < -8$ (cioè $x \in]-10, -8[$: valori interni), e si annulla nei punti $x_1 = -10$, $x_2 = -8$.

Quindi i punti $(-10, 0)$ e $(-8, 0)$ sono le due intersezioni del grafico di ϕ_1 con l'asse delle x $(y = 0)$. Inoltre $\phi_1(0) = 80$, e pertanto il punto $(0, 80)$ è l'(unica) intersezione del grafico di ϕ_1 con l'asse delle y.

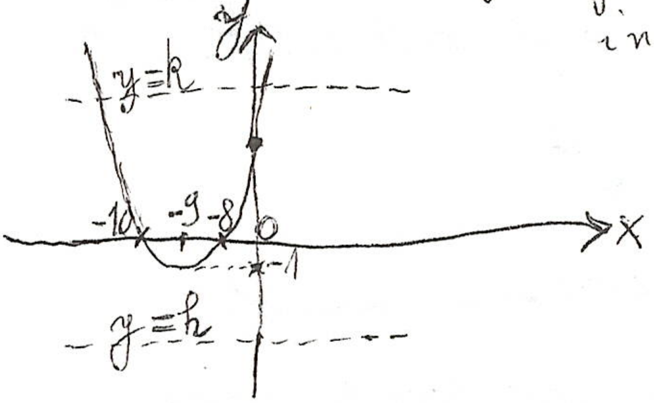
Asintoti: Innanzi tutto notiamo che, siccome $\lim_{x \to \pm\infty} \phi_1(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2$ ("vince" il grado più grande) $= +\infty$, allora non ci sono asintoti orizzontali.

Vediamo ora gli asintoti obliqui. Si ha:
$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\phi_1(x)}{x} =$ (principio di sostituzione degli infiniti) $= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$. Pertanto non ci sono asintoti obliqui.
Infine, notiamo che ϕ_1 è continua in tutto $\mathbb{R}$, e quindi non esistono asintoti verticali.
Derivata (= derivata prima): $\boxed{\phi_1'(x)} = 2x + 18\underbrace{D(x)}_{1} + \underbrace{D(80)}_{0} = \boxed{2x+18}$
Si ha: $\phi_1'(x) > 0$ se e solo se $2x > -18 \iff x > -9$
$\phi_1'(x) < 0$ se e solo se $2x < -18 \iff x < -9$
$\phi_1'(x) = 0$ se e solo se $2x = -18 \iff x = -9$
Pertanto, per il test di MONOTONIA, ϕ_1 è strettamente decrescente per $x \leq -9$, cioè in $]-\infty, -9]$, ed è strettamente crescente per $x \geq -9$, cioè in $[-9, +\infty[$.
Il punto $x = -9$ è un punto di minimo per ϕ_1 (che risulterà MINIMO assoluto, come vedremo dal grafico).
Derivata seconda: essendo $\phi_1'(x) = 2x + 18$, sarà

$$\phi_1''(x) = D(\phi_1'(x)) = 2D(x) + D(18) = 2\cdot 1 - 0 = 2 > 0$$

per ogni numero reale x, e quindi ϕ_1 è sempre convessa cioè rivolge la concavità verso l'alto ($\cup$) sempre, in tutto $\mathbb{R}$ (ove $\mathbb{R}$ è l'insieme di tutti i numeri reali).
Adesso, una volta che sappiamo il punto di minimo della parabola, determiniamo il valore minimo di ϕ_1, cioè il valore che ϕ_1 assume nel punto di minimo. Essendo $\phi_1(x) = x^2 + 18x + 80$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha: $\phi_1(-9) = 81 - 162 + 80 = \boxed{-1}$.
Il vertice della parabola è $(-9, -1)$. Verifichiamolo con il nostro COLLEGAMENTO PROFONDO. Si ha: $(-b)/2a = (-18)/2 = \boxed{-9}$; $(-\Delta)/4a = (4ac - b^2)/4a = (320 - 324)/4 = (-4)/4 = \boxed{-1}$.

Adesso determiniamo "a mano" (cioè, calcolando la x in funzione della y e supponendo y NOTO, cioè y COME SE FOSSE UNA COSTANTE) il codominio di ϕ_1 e le due "funzioni pseudo-inverse" oppure "inverse locali". Non si può parlare di un unica funzione inversa perché ϕ_1 globalmente NON è iniettiva: infatti esiste almeno un numero reale k (abbastanza grande) tale che la retta orizzontale y = k incontra il grafico della funzione ϕ_1 in almeno due punti.



Però ci sono due restrizioni (quella corrispondente al "ramo destro", definito in $[-9, +\infty[$ e quella corrispondente al "ramo sinistro", definito in $]-\infty, -9]$) in cui ϕ_1 è rispettivamente strettamente crescente e strettamente decrescente, e quindi – in entrambi i casi, INIETTIVA.

Per quanto riguarda la SURIETTIVITÀ, notiamo che ϕ_1 è globalmente NON SURIETTIVA (perché esiste almeno un numero reale k, diciamo k < 0 e inoltre "abbastanza vicino a $-\infty$", tale che la retta orizzontale y = k non incontra il grafico della funzione ϕ_1 in nessun punto). Ma se prendiamo

$\phi_1: \mathbb{R} \longrightarrow Im(\mathbb{R}) = \phi_1(\mathbb{R}) = \{\phi_1(x) : x \in \mathbb{R}\}$ = codominio di ϕ_1, allora automaticamente ϕ_1 è SURIETTIVA.

Proveremo, calcolando il codominio esprimendo la x in funzione della y, che il codominio della funzione ϕ_1 è <u>esattamente</u> <u>tutta</u> la semiretta $[-1, +\infty[$.

Ora calcoliamo il codominio di ϕ_1 trovando la x in funzione della y, e considerando y come se fosse un numero già noto, praticamente come se fosse una costante. L'equazione della parabola $y=\phi_1(x)$ si scrive come $y=x^2+18x+80$.

Per trovare x in funzione di y, non possiamo porre direttamente $x=\ldots$, $x^2=\ldots$, perché avremmo x in entrambi i membri, e potremmo essere in difficoltà. Allora (trucco!) PORTIAMO LA y nella stessa "parte", dove c'è anche la x, e facciamo in modo da avere il secondo membro uguale a **zero**, ottenendo così un'equazione di secondo grado, dove l'incognita è la x, e la y la si tratta come se fosse una "costante nota". Allora poniamo $x^2+18x+80-y=0$ e studiamo questa equazione di 2° grado, dove c'è anche y come termine noto e in cui l'(unica) incognita è la x. Si ha: $a=1$, $b=18$, $\boxed{c=80-y}$,

$$x_{1/2}=\frac{-18\pm\sqrt{324-4\cdot(80-y)}}{2}=\frac{-18\pm\sqrt{324-320+4y}}{2}=$$

$$=\boxed{\frac{-18\pm\sqrt{4+4y}}{2}}=\frac{-18\pm\sqrt{4\cdot(1+y)}}{2}=\frac{-18\pm\overset{2}{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{1+y}}{2}=$$

$=\boxed{-9\pm\sqrt{1+y}}$. Per trovare il codominio di ϕ_1 bisogna trovare il "campo di definizione della y", in quanto "codominio = = campo di esistenza della funzione inversa oppure delle funzioni "pseudo-inverse"; cioè bisogna determinare per quali y ha senso quello che stiamo scrivendo. Si può partire sia da $\sqrt{4+4y}$ che da $\sqrt{1+y}$. Poiché $\sqrt{t}$ ha senso se e solo se $t\geq 0$, allora $\sqrt{4+4y}$ ha senso se e solo se $4+4y\geq 0$, cioè $4y\geq -4$, ossia $\boxed{y\geq}-\frac{4}{4}=\boxed{-1}$; $\sqrt{1+y}$ ha senso se e solo se $1+y\geq 0$, cioè $\boxed{y\geq -1}$. Quindi il codominio di ϕ_1 è esattamente l'insieme dei punti y tali che $y\geq -1$, cioè $[-1,+\infty[$.

Ciò lo possiamo dedurre anche dal teorema dei valori intermedi: infatti ϕ_1 assume il valore -1, $\lim_{x\to\pm\infty} \phi_1(x) = +\infty$, e allora, per il teorema dei valori intermedi, ϕ_1 assume tutti i valori compresi fra -1 e $+\infty$ (-1 COMPRESO; $+\infty$ escluso). La nostra ϕ_1 assumerà anche altri valori? NO. Perché? Perché il valore -1 è il valore assunto da ϕ_1 proprio nel suo punto di MINIMO ASSOLUTO, e quindi ϕ_1 non può ammettere nessun valore strettamente minore di -1 (come si vede anche graficamente). Pertanto il codominio di ϕ_1 è esattamente la semiretta $[-1, +\infty[$ (compreso -1).

Inoltre, nella pagina precedente abbiamo visto che

$$\boxed{x_{1,2} = -9 \pm \sqrt{1+y}}$$

. Pertanto le espressioni delle funzioni "pseudo-inverse" o "inverse locali" sono date da

$x_1 = -9 - \sqrt{1+y}$ (che è la funzione inversa della restrizione della parabola al "ramo sinistro" definito su $]-\infty, -9]$, dove la nostra ϕ_1 è strettamente decrescente) e

$x_2 = -9 + \sqrt{1+y}$ (che è la funzione inversa della restrizione della parabola al "ramo destro", definito su $[-9, +\infty[$, dove ϕ_1 è strettamente crescente).

Per le proprietà delle funzioni inverse, il dominio della x_1 e della x_2 è quindi $[-1, +\infty[$, che è il codominio di ϕ_1, mentre il codominio di x_1 è uguale al dominio del "ramo sinistro" di ϕ_1, cioè $]-\infty, -9]$, e il codominio di x_2 è uguale al dominio del "ramo destro" di ϕ_1, cioè $[-9, +\infty[$.

Esercizio: Studiare la funzione "parabola" $\phi_2(x) = x^2 - 4x + 3$

Facciamo lo studio di funzione (n.b.: $a=1$, $b=-4$, $c=3$)

Il dominio è tutto $\mathbb{R}$.

Per il segno della funzione e le intersezioni con l'asse delle x, risolviamo l'equazione

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

e le corrispondenti disequazioni: $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$

Si ha: $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 > 0$

Si ha: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

Le soluzioni sono $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

La funzione ϕ_2 assume valori positivi per $x < 1$ oppure $x > 3$ (cioè $x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$), negativi per $1 < x < 3$ (cioè $x \in]1, 3[$) e si annulla nei punti $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Quindi i punti $(1, 0)$ e $(3, 0)$ sono le due intersezioni del grafico di ϕ_2 con l'asse delle x $(y = 0)$.

Inoltre $\phi_2(0) = 3$, e quindi il punto $(0,3)$ è l'(unica) intersezione del grafico di ϕ_2 con l'asse delle y.

Asintoti: Siccome $\lim_{x \to \pm\infty} \phi_2(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2$ (vince il grado più grande) $= +\infty$, allora non ci sono asintoti orizzontali.

Vediamo ora gli asintoti obliqui. Si ha:
$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\phi_2(x)}{x}$ = (principio di sostituzione degli infiniti) $= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$. Pertanto non ci sono asintoti obliqui.
Infine, notiamo che ϕ_2 è continua in tutto $\mathbb{R}$, e quindi non esistono asintoti verticali.

Derivata (= derivata prima): $\phi_2'(x) = 2x - 4\overset{1}{D(x)} + \overset{0}{D(3)} = 2x - 4$

Si ha: $\phi_2'(x) > 0$ se e solo se $2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$
$\phi_2'(x) < 0$ se e solo se $2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$
$\phi_2'(x) = 0$ se e solo se $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Pertanto, per il test di MONOTONIA, ϕ_2 è strettamente decrescente per $x \leq 2$, cioè in $]-\infty, 2]$ ed è strettamente crescente per $x \geq 2$, cioè in $[2, +\infty[$.
Il punto $x = 2$ è un punto di minimo per ϕ_2 (che risulterà MINIMO assoluto, come vedremo dal grafico).

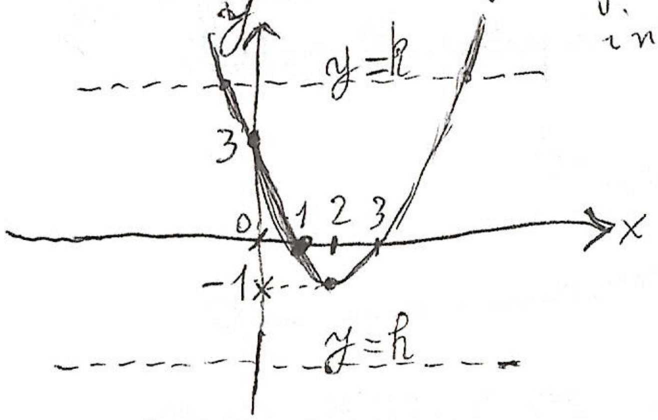
Derivata seconda: essendo $\phi_2'(x) = 2x - 4$, sarà

$$\phi_2''(x) = D(\phi_2'(x)) = 2D(x) - D(4) = 2 \cdot 1 - 0 = 2 > 0$$

per ogni numero reale x, e quindi ϕ_2 è sempre convessa cioè rivolge la concavità verso l'alto ($\cup$) sempre, in tutto $\mathbb{R}$ (ove $\mathbb{R}$ è l'insieme di tutti i numeri reali).

Adesso, una volta che sappiamo il punto di minimo della parabola, determiniamo il valore minimo di ϕ_2, cioè il valore che ϕ_2 assume nel punto di minimo $x = 2$.
Siccome $\phi_2(x) = x^2 - 4x + 3$, allora, sostituendo x con 2, otteniamo
$\phi_2(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = \boxed{-1}$. Pertanto, in virtù dei nostri COLLEGAMENTI profondi, le coordinate del vertice della nostra parabola sono $(2, -1)$.
Verifichiamolo, provando che $-\frac{b}{2a} = 2$, $-\frac{\Delta}{4a} = -1$. Si ha: $-\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$; $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{12 - 16}{4} = -\frac{4}{4} = -1$, come volevamo dimostrare.

Adesso determiniamo "a mano" (cioè, calcolando la x in funzione della y e supponendo y NOTO, cioè y COME SE FOSSE UNA COSTANTE) il codominio di ϕ_2 e le sue "funzioni pseudo-inverse" oppure "inverse locali". Non si può parlare di un'unica funzione



inversa perché ϕ_2 globalmente NON è iniettiva: infatti esiste almeno un numero reale k (abbastanza grande) tale che la retta orizzontale $y=k$ incontra il grafico della funzione ϕ_2 in almeno due punti. Però ci sono due restrizioni (quella corrispondente al "ramo destro", definito in $[2,+\infty[$ e quella corrispondente al "ramo sinistro", definito in $]-\infty, 2]$) in cui ϕ_2 è rispettivamente strettamente crescente e strettamente decrescente, e quindi – in entrambi i casi – INIETTIVA.

Per quando riguarda la SURIETTIVITÀ, notiamo che ϕ_2 è globalmente NON SURIETTIVA (perché esiste almeno un numero reale h, diciamo $h<0$ e inoltre "abbastanza vicino a $-\infty$", tale che la retta orizzontale $y=h$ non incontra il grafico della funzione ϕ_2 in nessun punto). Ma se prendiamo $\phi_2: \mathbb{R} \to Im(\mathbb{R}) = \phi_2(\mathbb{R}) = \{\phi_2(x) : x \in \mathbb{R}\}$ = codominio di ϕ_2, allora automaticamente ϕ_2 è SURIETTIVA.

Ora dimostriamo, calcolando il codominio esprimendo la x in funzione della y, che il codominio di ϕ_2 è esattamente tutta la semiretta $[-1, +\infty[$.

Ora calcoliamo il codominio di ϕ_2, trovando la x in funzione della y, e considerando y come se fosse un numero già noto, praticamente come se fosse una costante. L'equazione della parabola $y = \phi_2(x)$ si scrive come $y = x^2 - 4x + 3$.

Per trovare x in funzione di y, non possiamo porre direttamente $x = \ldots$, $x^2 = \ldots$, perché avremmo x in entrambi i membri, e potremmo essere in difficoltà. Allora (trucco!) PORTIAMO LA y nella stessa "parte" dove c'è anche la x, e facciamo in modo da avere il secondo membro uguale a zero, ottenendo così un'equazione di secondo grado, dove l'incognita è la x, e la y la si tratta come se fosse una "costante nota".

Allora, da $y = x^2 - 4x + 3$, poniamo $x^2 - 4x + 3 - y = 0$ e studiamo questa equazione di 2° grado, dove c'è anche y come termine noto, e in cui l'(unica) incognita è la x. Si ha:

$a = 1$, $b = -4$, $\boxed{c = 3 - y}$,

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (3 - y)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12 + 4y}}{2} = \boxed{\frac{4 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2}}$$

ci possiamo fermare qui →

oppure possiamo "semplificare", ottenendo (proprietà delle radici...)

$$\frac{4 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4(1+y)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{1+y}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{1+y}}{2} =$$

$= \boxed{2 \pm \sqrt{1+y}}$. Il codominio di ϕ_2 sarà l'"insieme di definizione della y", in quanto "Codominio = campo di esistenza della funzione inversa" o delle funzioni "pseudo-inverse". Determiniamo allora per quali y ha senso quello che stiamo facendo. Si può partire sia da $\sqrt{4+4y}$ che da $\sqrt{1+y}$. Poiché $\sqrt{t}$ ha senso se e solo se $t \geq 0$, allora $\sqrt{4+4y}$ ha senso se e solo se $4 + 4y \geq 0$, cioè $4y \geq -4$, ossia $\boxed{y \geq} -\frac{4}{4} = \boxed{-1}$; $\sqrt{1+y}$ ha senso se e solo se $1 + y \geq 0$, cioè $\boxed{y \geq -1}$. Pertanto il codominio di ϕ_2 è <u>esattamente</u> l'insieme dei punti y tali che $y \geq -1$, cioè $[-1, +\infty[$.

Ciò lo possiamo dedurre anche dal teorema dei valori intermedi: infatti ϕ_2 assume il valore -1, $\lim_{x \to +\infty} \phi_2(x) = +\infty$, e allora, per il teorema dei valori intermedi, ϕ_2 assume tutti i valori compresi fra -1 e $+\infty$ (-1 COMPRESO, $+\infty$ escluso). La nostra ϕ_2 assumerà anche altri valori? NO. Perché? Perché il valore -1 è il valore assunto da ϕ_2 proprio nel suo punto di MINIMO ASSOLUTO, e quindi ϕ_2 non può ammettere nessun valore strettamente minore di -1 (come si vede anche graficamente). Pertanto il codominio di ϕ_2 è esattamente la semiretta $[-1, +\infty[$ (compreso -1).

Inoltre, nella pagina precedente abbiamo visto che

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1+y}$$

. Pertanto le espressioni delle funzioni "pseudo-inverse" o "inverse locali" sono date da

$x_1 = 2 - \sqrt{1+y}$ (che è la funzione inversa della restrizione della parabola al "ramo sinistro", definito su $]-\infty, 2]$, dove la nostra ϕ_2 è strettamente decrescente) e

$x_2 = 2 + \sqrt{1+y}$ (che è la funzione inversa della restrizione della parabola al "ramo destro", definito su $[2, +\infty[$, dove ϕ_2 è strettamente crescente).

Per le proprietà delle funzioni inverse, il dominio della x_1 e della x_2 è quindi $[-1, +\infty[$, che è il codominio di ϕ_2 mentre il codominio di x_1 è uguale al dominio del "ramo sinistro" di ϕ_2, cioè $]-\infty, 2]$, e il codominio di x_2 è uguale al dominio del "ramo destro" di ϕ_2, cioè $[2, +\infty[$.

Esercizio.

Sia $\psi(x) = x^3 + 27$ (il dominio è tutto $\mathbb{R}$)

a) Studiare iniettività e suriettività di ψ, e determinare l'eventuale funzione inversa (o le eventuali funzioni "pseudo-inverse") e il codominio di ψ ("a mano").

b) Fare lo studio di funzione, e dedurre iniettività, suriettività e codominio dallo studio di funzione (con proprietà studiate, e non "a mano").

---

a) Si può procedere tenendo conto, come abbiamo visto e provato in questi appunti, che la funzione x^3 è strettamente crescente. Da ciò segue che ψ è strettamente crescente. Infatti, se x_1 ed x_2 sono due numeri reali qualsiasi tali che $x_1 < x_2$, allora si ha, per la stretta crescenza della funzione x^3: $x_1^3 < x_2^3$, da cui $\psi(x_1) = x_1^3 + 27 < x_2^3 + 27 = \psi(x_2)$.

Quindi ψ è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$, e di conseguenza ψ è iniettiva in tutto $\mathbb{R}$.

Adesso, per vedere la suriettività, calcoliamo il codominio di ψ, ricavandoci la x in funzione della y come abbiamo fatto negli esercizi precedenti.

Poniamo $y = x^3 + 27$: si ottiene $x^3 = y - 27$, da cui $x = \sqrt[3]{y-27} = (y-27)^{\frac{1}{3}}$. Il codominio di ψ è l'insieme di (tutti e soli) quei punti y per i quali ha senso tutto quello che stiamo scrivendo. Ma, come abbiamo visto in questi appunti, la funzione radice cubica è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi la quantità $\sqrt[3]{y-27}$ è definita per ogni $y \in \mathbb{R}$. Da ciò si deduce che il codominio di ψ è tutto $\mathbb{R}$. Pertanto la funzione ψ, vista come $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è INIETTIVA E SURIETTIVA SU TUTTO $\mathbb{R}$, quindi BIIETTIVA SU TUTTO $\mathbb{R}$, ed ammette la funzione inversa $\psi^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da $\psi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-27}$.

Verifichiamo, come <u>esercizio</u>, che in effetti ψ e ψ^{-1} sono l'una la funzione inversa dell'altra, cioè che:

a) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\psi^{-1}(\psi(x)) = x$; $\qquad \psi(x) = x^3 + 27$

b) per ogni $y \in \mathbb{R}$, $\psi(\psi^{-1}(y)) = y$. $\qquad \psi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-27}$

a) Sia $x \in \mathbb{R}$ scelto arbitrariamente. Si ha:

$$\psi^{-1}(\psi(x)) = \psi^{-1}(x^3+27) \xlongequal{y = x^3+27} \sqrt[3]{(x^3+27)-27} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

b) Prendiamo arbitrariamente $y \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$\psi(\psi^{-1}(y)) = \psi(\sqrt[3]{y-27}) \xlongequal{x = \sqrt[3]{y-27}} (\sqrt[3]{y-27})^3 + 27 =$$

$= y - 27 + 27 = y$, come volevamo dimostrare

[P. S.: In realtà, abbiamo usato il fatto che le funzioni x^3 ed $y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{y}$ sono l'una l'inversa dell'altra (!!)]

b) Adesso, studiamo $\psi(x) = x^3 + 27$ come studio di funzione.

Il dominio è tutto $\mathbb{R}$.

Vediamo ora il segno della funzione e le intersezioni con gli assi coordinati. Si ha:

$x^3 + 27 > 0$ se e solo se $x^3 > -27 = (-3)^3$

se e solo se (usiamo ancora le proprietà delle funzioni inverse x^3 ed $y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{y}$, e la stretta crescenza)

$\sqrt[3]{x^3} > \sqrt[3]{(-3)^3}$, cioè $\boxed{x > -3}$.

Analogamente (con la sola differenza di porre $<$ al posto di $>$) si ottiene che $x^3 + 27 < 0$ se e solo se $x < -3$

e (con l'$=$ al posto del $>$) $x^3 + 27 = 0$ se e solo se $x = -3$.

Pertanto $\psi(x) > 0$ se e solo se $x > -3$
$\psi(x) = 0$ se e solo se $x = -3$
$\psi(x) < 0$ se e solo se $x < -3$

e dunque il punto $(-3, 0)$ è l'unica intersezione del grafico della funzione ψ con l'asse delle x.
Per determinare l'intersezione del grafico di ψ con l'asse delle y, calcoliamo $\psi(0)$. Si ha
$\psi(x) = x^3 + 27$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi $\psi(0) = 27$.
Pertanto $(0, 27)$ è l'(unica) intersezione del grafico della funzione ψ con l'asse delle y.

ASINTOTI: Innanzi tutto notiamo che ψ è continua in tutto $\mathbb{R}$ (i polinomi sono funzioni continue!), e quindi non ci sono asintoti verticali.
Inoltre, $\lim_{x \to +\infty} (x^3 + 27) = (+\infty)^3 + 27 = (+\infty) + 27 = +\infty$,
$\lim_{x \to -\infty} (x^3 + 27) = (-\infty)^3 + 27 = (-\infty) + 27 = -\infty$
e dunque non ci sono asintoti orizzontali.
Allora andiamo alla ricerca di asintoti obliqui.

Si ha: $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 27}{x} =$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x} + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{27}{x} = \left(\lim_{x \to \pm\infty} x^2\right) + \frac{27}{\pm\infty} = +\infty + 0 = \boxed{+\infty.}$

(vedi anche il principio di sostituzione degli infiniti)
Allora si può già dire che non esistono asintoti obliqui.

Derivata (prima): Poiché $\psi(x) = x^3 + 27$, allora $\psi'(x) = 3x^2 + \overbrace{D(27)}^{0} = 3x^2$, che è positiva in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$, e si annulla solamente nel punto 0. Per il TEST DI MONOTONIA, ψ è strettamente crescente in $]-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty[$, e quindi strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$.
NON CI SONO NÉ MASSIMI NÉ MINIMI.

Derivata seconda, cioè derivata della derivata (1ª).

Siccome $\psi'(x) = 3 \cdot x^2$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$), allora

$$\psi''(x) = D(\psi'(x)) = D(3 \cdot x^2) = 3 \cdot D(x^2) = 3 \cdot 2 \cdot x = 6x.$$

(la costante moltiplicativa passa fuori dal segno di derivata).

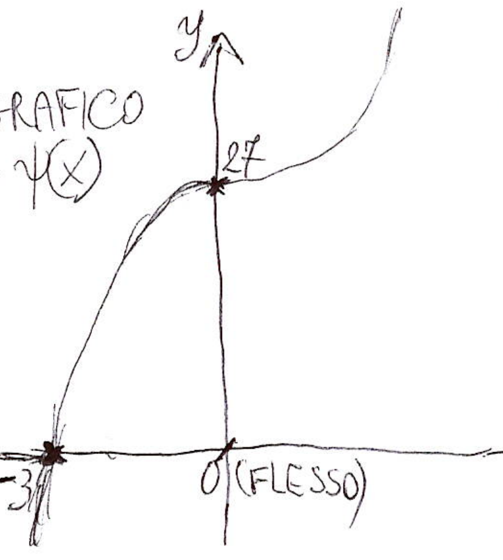
Allora $\psi''(x) > 0$ se e solo se $x > 0$,

$\psi''(x) < 0$ se e solo se $x < 0$,

$\psi''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$

Pertanto ψ è convessa ($\cup$) in $[0, +\infty[$ (cioè rivolge la concavità verso l'alto), è concava ($\cap$) (cioè rivolge la concavità verso il basso) in $]-\infty, 0]$, e il punto 0 è un punto di flesso (infatti, in corrispondenza di questo punto c'è il "cambio di concavità"). Inoltre, poiché $\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \psi(x) = -\infty$, e ψ è continua in tutto $\mathbb{R}$, allora, per il TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI, ψ assume tutti i valori compresi fra $-\infty$ e $+\infty$ (estremi esclusi). Pertanto il codominio di ψ è $]-\infty, +\infty[$, cioè TUTTO $\mathbb{R}$.

GRAFICO di $\psi(x)$



(come già sapevamo). Quindi $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è SURIETTIVA. Inoltre, l'INIETTIVITÀ di ψ è una conseguenza della sua STRETTA CRESCENZA.